

I-A 127

Q1/P0 要素を用いた安定化有限要素法による流れ解析

中央大学大学院 学生員 猪股 渉
中央大学理工学部 正会員 榎山和男

1. はじめに

Navier-Stokes 方程式を有限要素法により解く時に数値解が不安定に振動する場合があります、その主な原因として以下の二つのことが考えられる。まず一つ目としては、流速・圧力の補間関数の組み合わせが下限上限条件を満たさない場合、例えば同次補間や流速双一次・圧力0次で補間する Q1/P0 要素などを用いる場合で、これらの組み合わせでは解が安定に求められる保証はない。そこで本研究では、下限上限条件による制限を回避するため Q1/P0 要素のための安定化行列^{[1][2]}を用い、その有効性を確認するとともに同次補間を用いた場合との比較を行う。もう一つの原因は解析対象が高レイノルズ数流れになった場合に移流項が卓越することにあり、これにより通常の Galerkin 法では得られる数値解は振動してしまう。これを防ぐためには何らかの風上化を行う必要があり、本研究では SUPG 法^[3]を適用し解析を行う。また時間積分の精度を上げるにより同様の効果が得られる BTD 法、Taylor-Galerkin 法についても検討を行い、Q1/P0 要素を用いた有限要素法流れ解析のための高精度で計算効率に優れた安定化手法の構築を目指す。

2. 基礎方程式の時間方向離散化

Navier-Stokes 方程式を前進 Euler 法により流速は陽的に、圧力は陰的に離散化する。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n = -p_i^{n+1} + \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \quad (1)$$

以上の式と、 $n+1$ 時間ステップにおける連続式

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (2)$$

を時間進行の基礎式とする。ここで、 i は i 方向の偏微分、 u_i は i 方向の速度成分、 p は圧力、 Re はレイノルズ数を示す。

式(1)において Frictional step 法に基づき既知量をまとめると以下ようになる。

$$\bar{u}_i = u_i^n - \Delta t (u_j^n u_{i,j}^n - \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n) \quad (3)$$

これにより、式(1)は

$$u_i^{n+1} + \Delta t p_i^{n+1} = \bar{u}_i \quad (4)$$

と変形でき、式(2)と連立することにより u_i^{n+1} と p^{n+1} を求めることができる。

3. Q1/P0 要素のための安定化行列

式(2)と式(4)を Galerkin 法により離散化すると以下のような連立一次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_L & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

この連立一次方程式において係数行列の右下部が 0 となることにより、境界条件によってはチェッカーボード状の圧力振動が起こる。それを避けるために右下部に拡散型の行列 D を代入するというのが安定化行列の考え方である^{[1][2]}。安定化行列を図-1 のように 9 の要素からなる 2 次元メッシュの場合の 5 要素、つまり第 5 行について書き下すと

$$D_{5j} P_j = a_5 a_2 (P_5 - P_2) + a_5 a_4 (P_5 - P_4) + a_5 a_6 (P_5 - P_6) + a_5 a_8 (P_5 - P_8) \quad (6)$$

となり、 a_i は要素 i ごとに決められる安定化パラメータで以下のように与えている。

$$a_i = \alpha \sqrt{(C^T M_L^{-1} C)_{ii}} \quad (7)$$

ここで、 α は無次元パラメータで 2 次元計算の場合は 0.25、3 次元計算の場合は 0.5 としている。

1	4	7
2	5	8
3	6	9

図-1 2次元有限要素メッシュ例

式(5)に安定化行列を代入し、代数的に変形することにより圧力の部分を分離すると、 D を書き入れたポアソン方程式が以下のように得られる。

$$(C^T M_L^{-1} C + D) P^{n+1} = C^T \bar{u} \quad (8)$$

こうして得られた式(8)は式(5)と本質的に同じものであるという意味で‘コンシステント’な式と呼ばれている。

連立一次方程式の解法には Element-by-Element 共役勾配法を用い記憶容量の低減を図っている。

4. 同次補間のための安定化行列

式 (4) の発散をとり、非圧縮条件を考慮するために式 (2) を代入し、Galerkin 法により離散化すると以下のようなポアソン方程式が得られる。

$$A P^{n+1} = C^T \bar{u} \quad (9)$$

ここで、 A はラプラシアンを離散化したものに相当する。このポアソン方程式は式 (8) における安定化の項 D を

$$D = -(C^T M_L^{-1} C - A) \quad (10)$$

とすることにより安定化が成されているため、同次補間を用いることができる。この方法は‘コンシステント’ではないが、係数マトリックスの計算は式 (8) に比べて簡単である。ただし、式 (9) を解くには圧力に対する新たな境界条件が必要になり、それをどう与えるかという問題が生じる。

5. 数値解析例

5.1. 正方形 Cavity 内流れ

Q1/P0 要素のための安定化行列の有効性を示すのに、正方形 Cavity 内流れ ($Re=0.1$) を取り上げる。図-2 に示すように、安定化行列を用いない場合はチェッカーボード状の振動が発生しているが、安定化行列を用いることにより振動を抑えることができています。

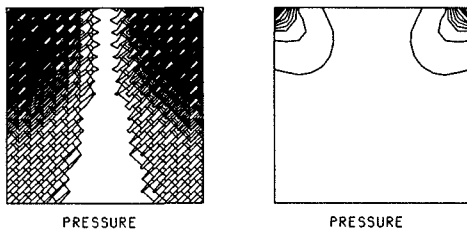


図-2 安定化行列を用いない場合 (左) と用いる場合 (右) の結果

5.2. Stnading vortex problem

各手法の解析精度の比較を行うのに、図-3 に示すよう初期条件を $u_\theta = \{ 5r \text{ for } r < 0.2, 2-5r \text{ for } 0.2 < r < 0.4, 0 \text{ for } r > 0.4 \}$ とし、粘性の影響の無い渦を与え運動エネルギーの減衰を考える (粘性の影響が無いので厳密解は初期条件そのものである)。図-4 に示すように SUPG 法を適用し、質量マトリックスを 3-pass algorithm で解いた場合が減衰を最小限に抑えているが、集中化した場合は過度に数値粘性が働き、解の精度を落としてしまっ

ているのがわかる。また Q1/P0 要素の方が Q1/Q1 要素より精度良く解析が行われているのもわかる。

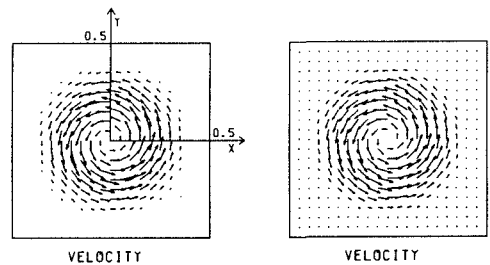


図-3 初期条件 (左) と SUPG 法 (Euler, 3-pass) による $t=3$ での結果 (右)

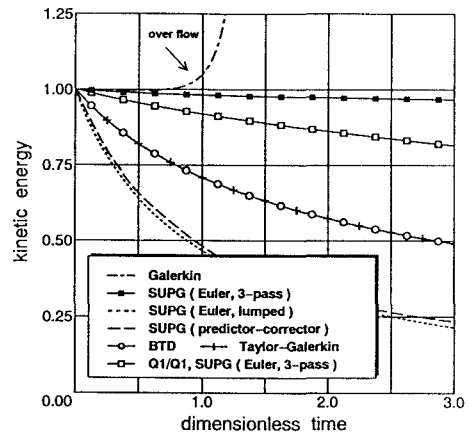


図-4 運動エネルギーの減衰による各手法の比較

6. おわりに

Q1/P0 要素を用いた有限要素法流れ解析における高精度で計算効率に優れた安定化手法の構築をし、本手法の有効性の確認をした。Q1/P0 要素特有のチェッカーボード状の圧力振動は、安定化行列により完全に除去することができた。また風上化手法として SUPG 法を適用し、質量マトリックスを集中化せずに 3-pass algorithm で解くことにより精度のよい結果が得られた。

参考文献

- [1] D.J. Silvester and N. Kechkar, "Stabilized bilinear-constant velocity-pressure finite elements for the conjugate gradient solution of the stokes problem", Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg., 79, pp71-86, 1990.
- [2] 水上昭, "Q1-P0 要素による FEM 流れ解析のための安定化行列", 第 8 回数値流体シンポジウム報文集, pp647-650, 1994.
- [3] T.E. Tezduyar, S. Mittal and R. Shih, "Time-accurate incompressible flow computations with quadrilateral velocity-pressure elements", Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg., 87, pp364-384, 1991.