

I-A 125

動弾性問題における BEM と FEM の
時間域結合手法に関する一考察新潟大学大学院 学生会員 須田 雅樹
新潟大学 正会員 阿部 和久

1. はじめに

境界要素法 (BEM) と有限要素法 (FEM) とでは、解法の特徴が互いに異なる。FEM では、一般に時間ステップ幅 Δt を短くすると時間積分の精度が向上するが、BEM では Δt を過度に短くとると解の安定性を低下させることもある。したがって両解法の結合には、両者の特性に配慮した手法の構成が重要である。本研究では以上の点に鑑み、時間領域において BEM と FEM とで異なる Δt を設定し得る結合手法について検討を行う¹⁾。

2. 結合手法

FEM の時間積分に Hilber-Hughes-Taylor 法 (H-H-T 法)²⁾を用いると、有限要素方程式は最終的に式 (1) のようになる。

$$\bar{\mathbf{K}}^F \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} + \bar{\mathbf{f}}_n \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{K}}^F = \frac{1}{\beta \Delta t_F^2} \mathbf{M} + (1 + \alpha) \mathbf{K}, \quad \bar{\mathbf{f}}_n = \alpha \mathbf{K} \mathbf{u}_n - \mathbf{M} \alpha_n \quad \dots \dots \dots (2)$$

であり、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M}$ はそれぞれ剛性、質量行列、 Δt_F は FEM の Δt 、 α 、 β は時間積分パラメータ、 $\mathbf{u}_n$ は第 n ステップにおける節点変位である。

時間領域において BEM と FEM を結合するためには、境界要素方程式を有限要素型に変換する必要がある、それは分布マトリクス $\mathbf{D}$ を用い次式のように与えられる。

$$\mathbf{K}^B \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} + \tilde{\mathbf{f}}_n \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}^B &= \mathbf{D}[\mathbf{G}^1]^{-1} \mathbf{H}^1, \quad \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{D} \mathbf{p}_{n+1}, \quad \tilde{\mathbf{f}}_n = \mathbf{D}[\mathbf{G}^1]^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_n \\ \tilde{\mathbf{u}}_n &= \mathbf{H}^1 \mathbf{u}_{n+1}^0 - \mathbf{G}^1 \mathbf{p}_{n+1}^0 + \sum_{m=2}^{n+1} [\mathbf{G}^m \{\mathbf{p}_{n+2-m} - \mathbf{p}_{n+2-m}^0\} - \mathbf{H}^m \{\mathbf{u}_{n+2-m} - \mathbf{u}_{n+2-m}^0\}] \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

であり、 $\mathbf{G}^m$ 、 $\mathbf{H}^m$ は第 m ステップに作成される BEM の係数行列、 $\mathbf{p}_n$ は第 n ステップの節点表面力、 $\mathbf{u}^0$ 、 $\mathbf{p}^0$ は入射波動の変位、表面力成分である。

BEM の Δt を Δt_B とし、 Δt_F との比をある整数値 $N = \Delta t_B / \Delta t_F$ とすると、時刻 $n \Delta t_B + i \Delta t_F$ ($i = 1, \dots, N$) における結合方程式は、式 (1)、(3) より、形式的に次式のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{K}_{12}^B & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^B & \mathbf{K}_{22}^B + \bar{\mathbf{K}}_{22}^F & \bar{\mathbf{K}}_{23}^F \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_{32}^F & \bar{\mathbf{K}}_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{n+i/N}^1 \\ \mathbf{u}_{n+i/N}^2 \\ \mathbf{u}_{n+i/N}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{n+i/N}^{1B} \\ 0 \\ \mathbf{f}_{n+i/N}^{3F} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{n-1+i/N}^1 \\ \tilde{\mathbf{f}}_{n-1+i/N}^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{f}}_{n+(i-1)/N}^2 \\ \tilde{\mathbf{f}}_{n+(i-1)/N}^3 \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (5)$$

式 (5) で、 $(n-1) \Delta t_B + i \Delta t_F$ における BEM に関する成分 $\tilde{\mathbf{f}}_{n-1+i/N}^1$ 、 $\tilde{\mathbf{f}}_{n-1+i/N}^2$ は、 $i \neq N$ の場合、対応する時刻において境界要素方程式が存在しないため、直接評価することができない。以下ではこれらの値の具体的評価手法について検討する。

(1) 手法 1 (高次補間により求める方法)

$\tilde{\mathbf{f}}_m$ ($m = 1, \dots, n$) の高次補間で $\tilde{\mathbf{f}}_{n-1+i/N}$ を作成する。なお、補間方法には次式の Lagrange 補間を用いた。

$$\tilde{\mathbf{f}}_{n-1+i/N} = \sum_{k=0}^P [\tilde{\mathbf{f}}_{n-P+k} \cdot L_k^P(t_{n-1+i/N})], \quad L_k^P(t) := \prod_{j=0, j \neq k}^P \frac{(t - t_j)}{(t_k - t_j)} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここで P は補間多項式の次数であり、 $\tilde{\mathbf{f}}_n$ までの $(P+1)$ 個の補間点をとる。なお、 $t_{n-1+i/N}$ は補間を行う場所の時刻 $(n-1) \Delta t_B + i \Delta t_F$ を、また、 t_k は補間点 k の時刻 $(n-P+k) \Delta t_B$ を表す。

(2) 手法2 (n個の解列を用いる方法)

$t = -\Delta t_B + i\Delta t_F (i = 1, \dots, N)$ を初期時刻とした n 個の解列をとり, Δt_F 進む毎に解を順次交換して用いる方法である. $t = i\Delta t_F$ では $t = -\Delta t_B + i\Delta t_F$ を初期状態にとり $\tilde{\mathbf{f}}_{-1+i/N}$ を計算する. $t = \Delta t_B + i\Delta t_F$ では $t = -\Delta t_B + i\Delta t_F$, $i\Delta t_F$ での解に基づき $\tilde{\mathbf{f}}_{i/N}$ を計算する. 以下同様に, $t = n\Delta t_B + i\Delta t_F$ では $t = -\Delta t_B + i\Delta t_F$ を初期状態にとり, Δt_B 毎の解を用いて,

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n-1+i/N} = \sum_{m=2}^n (\mathbf{G}^m \mathbf{p}_{n+1-m+i/N} - \mathbf{H}^m \mathbf{u}_{n+1-m+i/N}) \dots \dots \dots (7)$$

を計算し, 式(4)より, $\tilde{\mathbf{f}}_{n-1+i/N}$ を求める. ただし $t < 0$ での解は全てゼロとする.

3. 解析例

解析モデルに図1に示すよう

な半無限均質場を用い, BEM 領域と FEM 領域のいずれにおいて

もポアソン比 $\nu = 1/3$ とし, 縦波, 横波の伝播速度の比は 2:1 とした. また $\Delta t_B = T/12$ (T : 主要周期) とし, Ricker Wavelet (主要波長: $\lambda = 4a$) を鉛直下方より入射し, 結合面上の解の精度に基づき, 両手法の妥当性を比較検討した. なお, その際の解の精度は次式に示すようなノルムで評価した.

$$\|E\| = \frac{\sqrt{\sum (u_{ij} - \tilde{u}_{ij})^2}}{\sqrt{\sum u_{ij}^2}} \dots \dots \dots (8)$$

ここで, u_{ij} , $\tilde{u}_{ij}$ はそれぞれ図1における水平結合面上の節点 i の時間ステップ j における水平方向変位の真の解および数値解であり, 和は各節点について BEM の時間ステップで 50 ステップまでとった. H-H-T 法の時間積分パラメータが $\alpha = 0$, -0.1 の各場合の誤差ノルム $\|E\|$ を表1に示す.

表1 $N = \Delta t_B / \Delta t_F$ の精度への影響

N	$\alpha = 0$					$\alpha = -0.1$				
	手法1				手法2	手法1				手法2
	P=1	P=2	P=3	P=4		P=1	P=2	P=3	P=4	
1	0.0970	0.0970	0.0970	0.0970	0.0970	0.1324	0.1324	0.1324	0.1324	0.1324
2	0.0765	0.0502	0.2208	2.7381	0.0342	0.0698	0.0393	0.0302	0.0639	0.0333
3	0.1067	0.0655	0.0509	0.1456	0.0792	0.1033	0.0624	0.0461	0.0576	0.0520
4	0.1164	0.0733	0.0566	0.0572	0.5260	0.1149	0.0713	0.0534	0.0553	0.0599
5	0.1219	0.0757	0.0608	0.0772	1.6819	0.1201	0.0746	0.0571	0.0612	0.0763

表1の $\alpha = 0$ でノルムが大きいものは, 不安定解の発生によるものである. 手法1の比較的高次の補間で $N = 2$ とした場合と手法2で N を大きくとった場合に不安定解が生じているが, $\alpha = -0.1$ の下で数値減衰を導入した場合にはそれがほとんど抑えられている. これは誤差の原因が波動通過後の高次振動によるもので, $\alpha = -0.1$ の場合にそのほとんどが抑制された為である. また, $N = 1$ では, 数値減衰の導入で, 解の精度が低下しているが, 手法1で $P \geq 2$ の場合と手法2とで, おのおの $N \geq 2$ とした場合, 数値減衰による解の安定化に加え, $\Delta t_F < \Delta t_B$ とすることにより, 同時に精度向上も達成されており, 本手法適用の効果が認められる.

参考文献

- 1) 阿部和久: 動弾性問題における時間領域型境界要素法の実用化に関する基礎的研究, 1991.
- 2) Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L.: Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, Earthquake Eng. Struct. Dyn., Vol.5, pp.283-292, 1977.