

I-A 124

hr-境界要素適応分割過程の改善
に関する研究新潟大学大学院 学生員 櫻庭庄平
新潟大学 正会員 阿部和久

1. はじめに

著者はこれまで h-法, r-法および hr-法の構成について検討してきた¹⁾. r-法は与えられた要素数下で最適な要素配置を与えるが, 設定要素数が要求精度に対して過不足を生じ得る. この問題点に対し, hr-法は有効な解決策となる. しかし, h-法を r-法と結合した場合, 各分割段階で r-法により最適化された要素配置に対し, h-法による細分割が適用されることとなる. 一般に要素分割は, 近似精度の低い要素に対しなされるが, 上述のように r-法で最適化された後では, 全要素が同レベルの近似精度を有しているため, 全要素が分割対象と判断され, 過剰な要素分割が行われる危険性がある. 従来の hr-法におけるこの問題の原因は, h-, r-の両過程に対し適応分割機能を持たせたことにある. 本研究では, h-過程に対しては単に必要要素数を生成する機能を課し, r-過程に対し, h-過程で得た要素数の下で最適要素配置を決定する機能を持たせることで, 従来の hr-法における問題点の改善を図った.

2. hr-法の構成

(1) 残差 R の定義

2次元ポテンシャル問題を例に考える. 各選点における残差 R_i , 各要素での近似度を示す error indicator λ_j および全体の精度を評価する error estimator η を以下の様に定義する.

$$\begin{aligned} R_i &= \sum_j^N \lambda_{ij} & , \quad \lambda_{ij} &= - \int_{\Gamma_j} q^*(u - \hat{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma_j} u^*(q - \hat{q}) d\Gamma \\ \lambda_j &= \text{Max}\{\lambda_{ij} | i = 1, \dots, N\} & , \quad \eta &= \sum_j^N \lambda_j \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, u^*, q^* は基本解, u, q はポテンシャル, 流束の真の解, $\hat{u}, \hat{q}$ は境界要素解, N は選点総数である. なお, ここでは簡単のため, 要素数も N とした. また, λ_{ij} は境界要素解とその高次補間より近似評価する¹⁾.

(2) h-法 (必要要素数の決定および要素分割)

全境界を, 形状や境界条件に基づき K 個の部分境界に分け, 最適配置等はこの部分境界単位で行う. 現段階で, 部分境界要素数が n_k , error indicator の平均が $\bar{\lambda}_k$ であったとする. 解析で要求されている精度が η_{tol} であり, これを与える要素数が n'_k , その下での全境界での error indicator が $\bar{\lambda}$ (同一値) とすると, 次式が成り立つ.

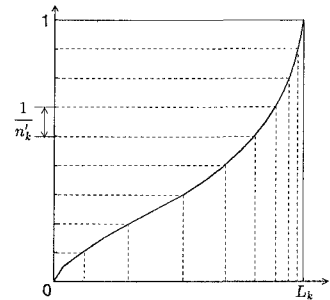
$$\eta = \sum_k^K n_k \bar{\lambda}_k \quad , \quad \eta_{tol} = \bar{\lambda} \sum_k^K n'_k \quad (2)$$

$\bar{\lambda}_k$ の収束次数を β とし, $\bar{\lambda}_k = C_k n_k^{-\beta}$ (C_k : 定数) とすると, $C_k = \bar{\lambda}_k n_k^\beta = \bar{\lambda} n'_k{}^\beta$ となるので, 必要要素数 n'_k は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} n'_k &= \left(\frac{\bar{\lambda}_k}{\bar{\lambda}} \right)^{1/\beta} n_k \\ \bar{\lambda} &= \left(\frac{\eta_{tol}}{\sum_k^K C_k^{1/\beta}} \right)^{\beta/\beta-1} \quad , \quad C_k = \bar{\lambda}_k n_k^\beta \end{aligned} \quad (3)$$

次に, 式 (3) で決定された要素数 n'_k に対応した境界要素を部分境界上で生成するために, 直前の r-過程で得られた要素配置に関する次の grading function g を用いる.

$$g(s_j) = \frac{j}{n_k} \quad (j = 0, \dots, n_k) \quad (4)$$

図-1 要素数 n'_k における要素配置

ここで、 s_j は要素端点の境界線に沿った座標値である。要素数 n'_k における要素配置は、関数 g に基づき、図-1 に示すように縦座標を n'_k 等分することで与える。

(3)r-法（最適要素配置の決定）

r-法では、残差 R のノルム $\|\tilde{R}\|$ を最小にする要素配置を最適要素配置とし、次式に基づき要素再配置を行う¹⁾。

$$h'_j = \frac{L_k}{\sum h_m / \lambda_m^{1/\beta}} \cdot \frac{h_j}{\lambda_j^{1/\beta}} \quad (5)$$

ここで、 L_k は部分境界長、 h_j, h'_j は各々再配置前後の要素長を表す。また、r-法の収束判定には、各部分境界上の error indicator λ_j の最大値と平均値の比 $\lambda_{j\max}/\lambda_{j\text{mean}}$ を用い、これが許容値以下となった段階で終了とした。

(4)h-法と r-法の組み合わせ

(2),(3) に述べた h-法、r-法を交互に適用し収束するまで繰り返すことで最終的な分割を決定する。ここで、r-法の適用方法について以下の2ケースを検討した。

Case 1： 全分割段階において r-法による要素再配置操作を収束するまで行う。

Case 2： r-法による要素再配置操作を、最終段階以外は1回とし、最終段階のみ収束するまで行う。

3. 解析例

解析例を図-2 に、本研究での手法と従来法¹⁾における最終分割での λ_j の分布を図-3.1、図-3.2 に示す。なお、上記2ケースについて検討した結果、最終要素数、CPUtime と大差はなかったため、ここでは Case2 の結果のみ示す。この解析では一定要素を用い、r-法の収束判定値を $\lambda_{k\max}/\lambda_{k\text{mean}} \leq 1.5$ 、初期分割には各部分境界を4分割したものを与えた。なお、本研究の h-過程では要素数が少ない段階において、必要分割数が過大に評価される傾向にあったため、最初の再分割時のみ n'_k を 0.4 倍した値を必要要素数とした。

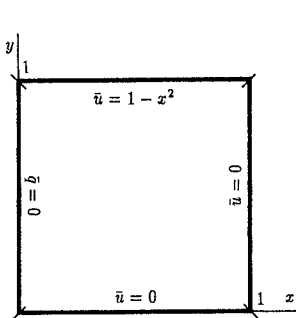


図-2 解析条件

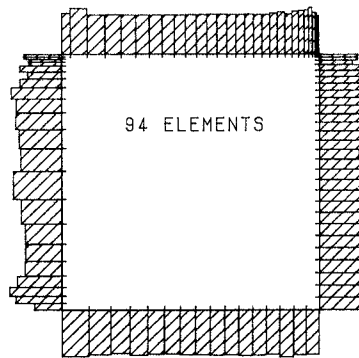


図-3.1 本手法による解析結果

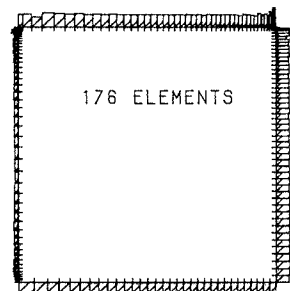


図-3.2 従来手法による解析結果

本手法における最終要素数が 94 に対し従来法では 176 と、約 2 倍の要素分割を与えている。また、 $\eta_{tol} = 0.004$ に対し、本手法では $\eta = 0.00381$ 、従来法では $\eta = 0.00178$ であり、従来法によるものが明らかに過剰分割となっており、本手法によってこれが改善されていることがわかる。なお、CPUtime について見ると、本研究の手法では 1.36 秒、従来手法では 6.89 秒と、本手法により再分割過程が短縮されたことによる効果が顕著に認められる。

参考文献

- 1) 阿部和久・赤沢友治：境界要素法論文集，第 10 巻，89-94，1993。