

I-A 123

BEMによる異方性体中のき裂解析

岡山大学大学院 学生員 ○為本隆也
ノースウエスタン大学 C.Y.Wang
岡山大学環境理工学部 正員 廣瀬壮一

1. はじめに

自然界に地盤、岩、氷、木材、複合材料など異方性を示す弾性体は多く存在し、これらの力学的挙動を明らかにすることは重要である。本研究では一般的な異方弾性体に対する境界要素法の解析コードを開発して、材料の異方性がその力学的特性に及ぼす影響を明らかにするものである。解析例として、異方弾性体中のき裂の静的解析結果を示す。

2. 解析法

境界要素法では、解くべき問題のグリーン関数が重要な役割を担っている。*Wang & Achenbach*¹⁾は二次元及び三次元線形異方弾性体の時間領域における動弾性グリーン関数をラドン変換により求めた。求められたグリーン関数は静弾性部と動弾性部に完全に分離されている。ここでは静弾性部を用いて、異方弾性体中の静的き裂解析を行う。無限遠方で応力 σ_{ij}^{∞} が作用している無限異方弾性体中にあるき裂を考える。き裂表面上の応力が0であるとする、次式を得る。

$$-t_j^{\infty}(\mathbf{x}) = \int_C W_{ij}^S(\mathbf{y}; \mathbf{x}) [u_i(\mathbf{y})] ds(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x} \in C \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $t_j^{\infty}(\mathbf{x}) = \sigma_{ji}^{\infty}(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x})$ であり、 $n_i(\mathbf{x})$ はき裂面での法線ベクトルである。また $[u_i(\mathbf{y})]$ は開口変位である。また、 W_{ij}^S は *Wang & Achenbach* によって求められたグリーン関数の静弾性部に Stroh 定理を適用して得られた2重層核の応力成分で、次式により求まる。

$$W_{ij}^S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{\partial}{\partial s(\mathbf{x})} \frac{\partial}{\partial s(\mathbf{y})} \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\lambda=1}^3 \tilde{C}_{ij}^{\lambda} \log\{d_{\lambda} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\tilde{C}_{ij}^{\lambda} = \frac{(M_{ip} + L_{ip} \eta_{\lambda}) A_{pk}(\eta_{\lambda})(M_{jk} + L_{jk} \eta_{\lambda})}{\partial_{\eta} D(\eta_{\lambda})} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ただし、 $s(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ 点での接線方向のパラメータである。 η_{λ} , A_{pk} , M_{ip} , L_{ip} , D は弾性定数により決定される定数である。詳しくは文献1)を参照されたい。 W^s は超特異性をもっているため、次に述べるガラーキン法により積分方程式を解く²⁾。開口変位 $[u_i(\mathbf{y})]$ を空間に関する形状関数 $\phi^m(\mathbf{y})$ によって $[u_i(\mathbf{y})] = \sum_m \phi^m(\mathbf{y}) [u_i^m]$ と表したとする。そして式(1)の両辺に開口変位を表す形状関数と同じ関数 $\phi^n(\mathbf{x})$ を掛け、 $\mathbf{x}$ について積分を行うと、

$$\begin{aligned} - \underbrace{\int_C \phi^n(\mathbf{x}) t_j^{\infty}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x})}_{T_j^n} &= \int_C \phi^n(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \int_C W_{ij}^S(\mathbf{y}; \mathbf{x}) [u_i(\mathbf{y})] ds(\mathbf{y}) \\ &= - \underbrace{\int_C \frac{\partial \phi^n}{\partial s(\mathbf{x})} ds(\mathbf{x}) \int_C \frac{\partial \phi^m}{\partial s(\mathbf{y})} \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\lambda} \tilde{C}_{ij}^{\lambda} \log\{d_{\lambda} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\} ds(\mathbf{y}) [u_i^m]}_{J_{ij}^{m,n}} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

となる。

式(4)は次のように離散化できる。

$$-T_j^n = \sum_m \sum_i J_{ij}^{m,n} [u_i^m] \quad \dots\dots\dots (5)$$

3. 解析結果

図1に示すような、異方弾性体の二次元平面ひずみ状態の静的き裂解析を考える。解析モデルとして無限遠方で一様な応力 σ_{22}^{∞} が作用しているとする。Voigt定数を用いると応力-ひずみ関係は $\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j$ と表せる。 $\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$ などである。本研究では定数 C_{ij} を次のように仮定した。

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1/3 & 1/3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1/3 & C_{22} & 1/3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1/3 & 1/3 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1/3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1/3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$C_{22} = 1$ とするとポアソン比0.25の等方弾性体の場合に相当する。応力 σ_{22}^{∞} を作用させ、 C_{22} を0.80, 0.90, 1.0, 1.1, 1.2と順に変化させていった時の開口変位をグラフに表すと図2のようになる。ただし解析においてはき裂を30節点, 29要素に分割し、形状関数 $\phi(x)$ として線形1次関数を用いた。 $C_{22} = 1$ の等方弾性体の時は厳密解とほとんど一致する結果が得られた。またこの図を見れば弾性定数が大きくなるに従って開口変位が小さくなっていて異方性の影響が良く現れている。

4. おわりに

本論文では二次元グリーン関数の静弾性部分のみを用いて静的き裂解析を行ったが、グリーン関数の動弾性部分を含めた異方弾性体の動的解析コードを開発していき、さらに三次元への拡張を図る。

参考文献

- 1) C.-Y. Wang and J.D. Achenbach : Elastodynamic fundamental solution for anisotropic solids, Geophys. J. Int. (1994) 118, 384-392
- 2) N. Nishimura and S. Kobayashi, A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems, Comput. Mech., 4, 319-328, 1989.

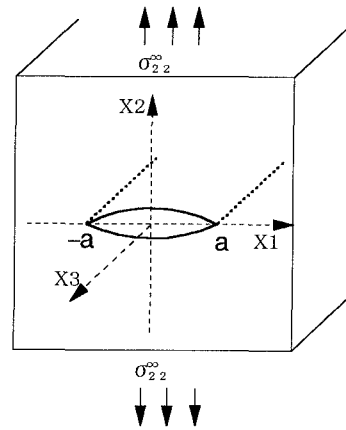


図1 解析モデル

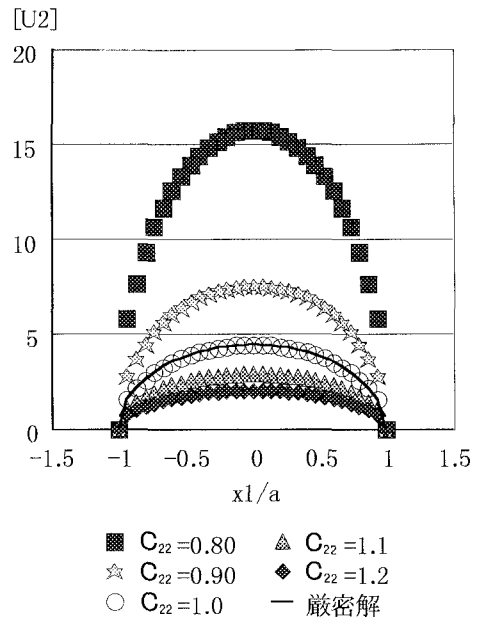


図2 開口変位