土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I－A 122

Element Free Galerkin MethodによるTimoshenko梁の解析

東京電機大学　学生会員　庭山孝史
東京電機大学　正 会 員　井浦雅司

1．概要

現在、構造解析には有限要素法 (FEM) が広く用いられているが、最近Nayrolesら[1]によって、要素分割を必要としないDiffuse Element Methodと呼ばれる手法が提案された。Belytschkoら[2][3]はこの手法を改良し、Element Free Galerkin Method (EFGM) と呼ばれる手法を提案した。EFGMではLancasterら[4]が用いた移動最小二乗法 (Moving Least Squares Method) を用いてtrial関数とtest関数を求める。

本報告では、EFGMをTimoshenko梁に適用し、FEMで問題となるせん断ロッキングが起こるかどうかを確かめ、さらに、節点の配置、セルの数、サポートの半径を変えて、EFGMの解の精度に与える影響を調べた。また、境界条件を与える方法として、Lagrange乗数を用いた場合とペナルティー関数を用いた場合を比較する。

2．移動最小二乗法 (MLSM) における形状関数と重み関数

ここでは１次元問題を対象として、形状関数と重み関数の説明を行う。MLSMでは、解析領域内の任意の点 x において、関数 $u(x)$ を近似的に次のように定義する。

$$u^h(x) = \boldsymbol{p}^t(x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{N}^t(x)\boldsymbol{u} \tag{1}$$

ここに、

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}^t(x) = [1, x] \quad , \qquad \boldsymbol{A}(x) = \sum_I^n w(x - x_I)\boldsymbol{p}(x_I)\boldsymbol{p}^t(x_I) \\ &\boldsymbol{B}(x) = [w(x - x_1)\boldsymbol{p}(x_1), w(x - x_2)\boldsymbol{p}(x_2), \ldots, w(x - x_n)\boldsymbol{p}(x_n)] \quad , \qquad \boldsymbol{u}^t = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \end{aligned} \tag{2}$$

であり、n は評価点 x の周囲にある節点の総数、w は重み関数である。

本報告では、重み関数としてQuartic Spline Functionを用いる。

$$\begin{aligned} &w_I(d_I) = 1.0 - 6.0\left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^2 + 8.0\left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^3 - 3.0\left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)^4 \quad , \qquad d_I \le d_{mI} \\ &d_I = \|x - x_I\| \end{aligned} \tag{3}$$

ここに、d_{mI} は重み関数がサポートする領域の半径である。

3．EFGMによる解析方法

EFGMによる解析方法をFig.1に示す。解析領域はセルによって分割する。このセルは節点と無関係であり規則的に並べられる。剛性方程式の積分はこのセルごとに行われ、各セルにおける積分にはガウス積分を用いる。剛性方程式を節点値に関して離散化して、これを解くことにより節点値を求めることが出来る。節点値が求められれば、解析領域内の任意の点での変位を式(1)より求めることが出来る。

4．Timoshenko梁への適用

ここではTimoshenko梁にEFGMを用いて解析する。Lagrange乗数を用いた時の基礎式は以下のように表わされる。

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(\theta')^2 + \frac{GA}{2}(v' - \theta)^2 - Pv\right] dx - \left[\bar{Q}v - \bar{M}\theta\right]_{S_\sigma} - \left[\alpha(v - \bar{v}) - \beta(\theta - \bar{\theta})\right]_{S_u} \tag{4}$$

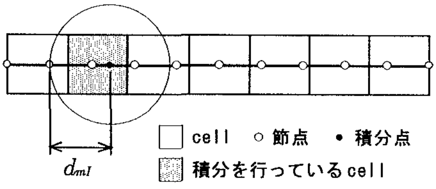


Fig.1

Table.1

case	節点数	節点の配置	セルの数	サポートの半径 (d_{mI}/L)
1	9	regular	10	0.4
2	9	regular	10	0.6
3	9	regular	20	0.6
4	9	irregular	10	0.6

ここに、vは変位、θは曲げによる回転角、αとβはLagrange乗数であり、物理的には支点における反力を表わす。

解析対象は片持ち梁である。条件は、梁の長さ$L = 1000$,高さ$h = 10$,幅$b = 1.2$,等分布荷重$p = 1$, ヤング率$E = 2.0 \times 10^6$,せん断弾性係数$G = 1.0 \times 10^6$である。本報告では、各セルにおける積分点の数を3とし、Table.1に示すケースについて計算を行った。また、計算結果よりEFGMではせん断ロッキングは起こらないことが確認された。

次に、解の精度に影響を及ぼす様々な要因について調べる。

（1）サポート半径による影響

まず、サポート半径が異なるcase1とcase2の結果を比較して、Fig.2に示す。ここで、(a)は変位、(b)はモーメントの図である。Fig.2より、変位、モーメント共に、サポート半径を大きくした方が、解の精度が良いことがわかる。ただし、サポート半径を大きくすると、係数マトリックスのバンド幅も大きくなる。

（2）セルの数による影響

次に、セルの数が異なるcase2とcase3の結果を比較して、Fig.3に示す。Fig.3より、変位、モーメント共に、セルの数を多くしても、解の精度にはそれほど影響が無いことがわかる。ただし、セルの数を多くすると、それだけ計算量が多くなる。

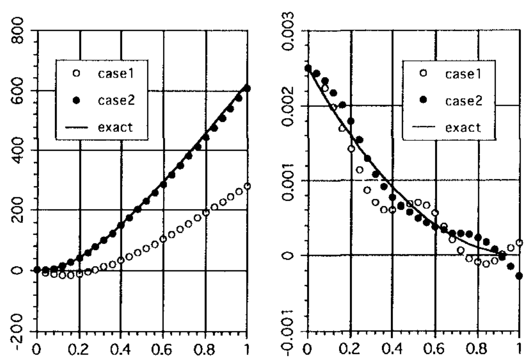
（3）節点の配置による影響

次に、節点の配置が異なるcase2とcase4の結果を比較して、Fig.4に示す。Fig.4より、変位、モーメント共に、規則的に節点を配置した方が、不規則的に節点を配置した時よりも、解の精度が良いことがわかる。

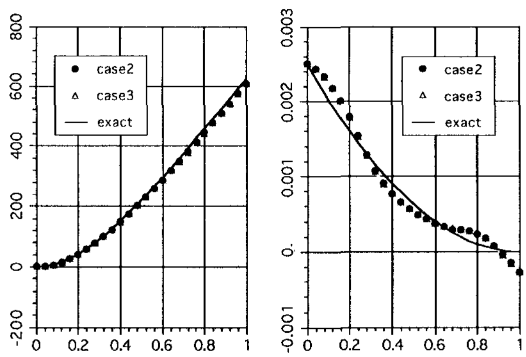
（4）Lagrange乗数とPenalty関数の比較

最後に、case1とcase2について、境界条件を与える方法として、Lagrange乗数を用いた場合とPenalty関数を用いた場合を比較して、Fig.5に示す。Fig.5より、Lagrange乗数の方が、Penalty関数よりも解の収束が良いことがわかる。

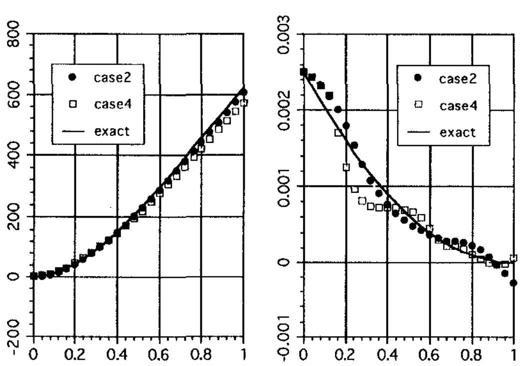
以上の結果より、EFGMの解の精度には、サポートの半径が大きく影響していることがわかった。また、今回の計算においては、境界条件を与える方法としてLagrange乗数を用いた方が良い結果が得られた。



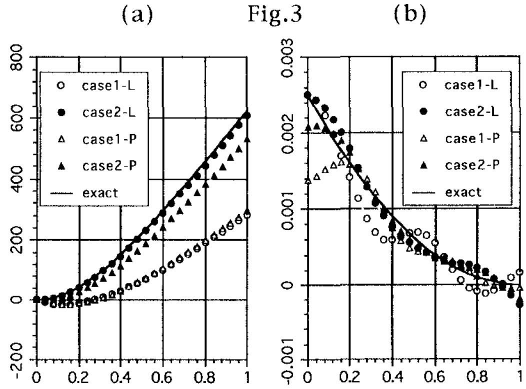
(a) Fig.2 (b)



(a) Fig.3 (b)



(a) Fig.4 (b)



(a) Fig.5 (b)

5．参考文献

[1]B.Nayroles,G.Touzot and P.Villon,Comput.Mech.,10,307-318(1992)
[2]T.Belytshko,Y.Y.Lu and L.Gu,International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.37,229-256(1994)
[3]Y.Y.Lu,T.Belytschko,L.Gu,Comput.Methods Appl.Mech.Engrg.133(1994) 397-414
[4]P.Lancaster and K.Salkauskas,Math.Comput.,37,141-158(1981)
[5] 奥田, 長嶋, 矢川, 日本機械学会論文集,vol.61a,194-200(1995)