土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I-A 121　粘弾性面内波動問題の時間領域境界要素法解析

福井大学大学院　学生員　○　井上耕一
石　川　高　専　正会員　　船戸慶輔
福井大学工学部　正会員　　福井卓雄

1　はじめに

粘弾性体の面内波動問題を時間領域境界要素法を用いて解析する。この研究の問題点は，基本特異解が解析的に得られない時間領域問題において，いかにして境界要素法を構成するかにある。ここでは，対応する周波数領域の基本解を数値的に積分変換してこの問題を解決した。この手法はすでに面外波動問題について適用されており [1]，良好な結果を得ている。同様の手法は他の問題，例えば，Biot 物体中の波動問題に拡張できるものである。以下では，微分に関する省略表現 $\dot{u} = \partial u/\partial t$ および $u_{,i} = \partial u/\partial x_i$ を用い，$f * g$ はくりこみ積をあらわす。

2　粘弾性面内波動問題

媒質は等方等質の線形粘弾性体であるとする。ρ は媒質の質量密度，$K(t), G(t)$ は体積変形およびせん断に対する緩和関数である。緩和関数は不遡及の公理 $K(t), G(t) = 0,\ -\infty < t < 0$ を満足するものとする。線形粘弾性面内波動問題の２次元領域 B およびその境界 ∂B における初期値境界値問題は，変位を $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ 応力を σ_{ij} 境界 ∂B 上の単位法線ベクトルを n_j として，つぎのように書ける。

$$G * du_{i,jj} + \left(K + \frac{G}{3}\right) * du_{j,ij} + X_i = \rho \ddot{u}_i \qquad \text{in } B,\ 0 < t < \infty \tag{1}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}, 0) = u_i^0(\boldsymbol{x}), \quad \dot{u}_i(\boldsymbol{x}, 0) = v_i^0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{in } B,\ t = 0 \tag{2}$$

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \hat{u}_i(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{on } \partial B_1,\ 0 < t < \infty, \quad s_i(\boldsymbol{x}, t) = n_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = \hat{s}_i(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{on } \partial B_2,\ 0 < t < \infty \tag{3}$$

3　時間領域境界要素法の定式化

境界要素法を定式化するためには，まず，基礎方程式の基本特異解が解析的に閉じた形で得られることが必要である。一般的な線形粘弾性モデルに対しては基本特異解がこのような形では得られないが，ここでは，仮に基本特異解が与えられており，その (超) 関数的な特性は弾性体のそれと同等なものと仮定する。

境界積分方程式　基礎方程式の基本特異解 $G_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ が与えられていると仮定する。初期値境界値問題に対して，一般化された Green 公式により，境界 ∂B の上で次のような積分公式があたえられる。

$$C(\boldsymbol{x}) u_i(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\partial B} \left[G_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) * s_j(\boldsymbol{y}) - S_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) * u_j(\boldsymbol{y}) \right] ds_y \tag{4}$$

ただし，初期値 (あるいは入射波) の項 $\overset{\circ}{u}_i(\boldsymbol{x}, t)$ は省略した。また，C は $\boldsymbol{x}$ の位によって決まる係数で，境界 ∂B が滑らかであると仮定すると，$\boldsymbol{x} \in B$ のとき 1，$\boldsymbol{x} \in \partial B$ のとき 1/2，それ以外のとき 0 の値をとる。第二基本特異解 $S_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ は $G_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ に対応する応力を $\sigma_{ikj}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t)$ とするとき，$S_{ij}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}|t) = n_k(\boldsymbol{y}) \sigma_{jki}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}|t)$ で定義される。以上より，(4) は $\boldsymbol{x}$ が境界 ∂B 上にあるとき，境界関数 u, s の間に成立すべき条件を与え，境界上でこのどちらかの関数が与えられれば未知の関数に関する積分方程式となる。

境界要素法を導くために，積分公式 (4) における境界上の関数 u, s に適当な近似を導入する。いま，

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{A,k} \phi_A(\boldsymbol{x}) \psi_K(t) u_i^{AK}, \qquad s_i(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{A,k} \phi_A(\boldsymbol{x}) \psi_K(t) s_i^{AK} \tag{5}$$

と表し，(4) に代入すると，式の右辺は離散化されて，以下のようになる。

$$C(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x},t) \simeq \sum_{A,K}\left[\left(\int_{\partial B}[G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})*\psi_K]\,\phi_A(y)ds_y\right)s_i^{AK} - \left(\int_{\partial B}[S_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})*\psi_K]\,\phi_A(y)ds_y\right)u_i^{AK}\right] \quad (6)$$

4　影響関数の計算法

波動方程式 (1) を $\mathcal{F}[f]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}\,dt$ により Fourier 変換すると

$$G^* u^*_{i,jj} + \left(K^* + \frac{G^*}{3}\right)u^*_{j,ij} + X^*_i = -\rho\omega^2 u^*_i \quad (7)$$

を得る。ここに，$G^*=-i\omega\mathcal{F}[G]$, $K^*=-i\omega\mathcal{F}[K]$ は複素弾性係数である。方程式 (7) の基本特異解は，そのテンソル性と波動特性を明確にして

$$G^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|\omega) = \{E_{ij}\}^T[F]\{C^*\} \quad (8)$$

$$\{E_{ij}\} = \left\{\begin{array}{c}\delta_{ij}\\ r_{,i}r_{,j}\end{array}\right\},\quad [F]=\left[\begin{array}{ccc}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{array}\right],\quad \{C^*\}=\frac{i}{4}\left[\begin{array}{c}\frac{1}{\rho c_L{}^2}H_0^{(1)}(k_L r)\\ \frac{1}{\rho c_T{}^2}H_0^{(1)}(k_T r)\\ \frac{1}{\rho c_T{}^2}\frac{H_1^{(1)}(k_T r)}{k_T r} - \frac{1}{\rho c_L{}^2}\frac{H_1^{(1)}(k_L r)}{k_L r}\end{array}\right] \quad (9)$$

と書ける。ここに，複素波数 k_L, k_T は縦波および横波の位相速度を $c_L=\sqrt{(K^*+4/3G^*)/\rho}$, $c_T=\sqrt{G^*/\rho}$ とするとき，$k_L=\omega/c_L$, $k_T=\omega/c_T$ で与えられる。すなわち，基本解は，縦波の成分 $(1/c_L{}^2)H_0^{(1)}(k_L r)$，横波の成分 $(1/c_T{}^2)H_0^{(1)}(k_T r)$ および遷移波の成分 $(1/\rho c_T{}^2)(1/k_T r)H_1^{(1)}(k_T r) - (1/\rho c_L{}^2)(1/k_L r)H_1^{(1)}(k_L r)$ から構成されている。

ここで，周波数領域の基本解は $G^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|\omega)=\mathcal{F}[G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)]$ であるから，(6) の影響関数は逆変換により

$$G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)*\psi_K = \mathcal{F}^{-1}\left[G^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|\omega)\mathcal{F}[\psi_K]\right],\quad S_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)*\psi_K = \mathcal{F}^{-1}\left[S^*_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|\omega)\mathcal{F}[\psi_K]\right] \quad (10)$$

と表すことができる。

個々の波の成分に対応する影響関数 (10) の計算法については，すでに，面外波動問題において確立されており [1]，適切な数値積分を行えば十分な精度の係数が得られることが知られている。したがってこの場合にも，個々の波の成分の変数が複素数であること，および，遷移波の成分の第一項と第二項を個別に計算すると値が発散してしまうことに注意し適切に基本解を計算することによって，影響関数を面外波動問題で適用された方法と同様に計算することが可能である。

Fig.1，**Fig.2** にこの方法で計算した基本解の例を挙げる。**Fig.1**，**Fig.2** ともに，原点において x 軸方向に衝撃力が加わった場合の時刻歴応答であり，**Fig.1** は x 軸上の点における x 軸方向の変位，**Fig.2** は y 軸上の点における x 軸方向の変位を表している。解析手順の詳細と具体的な計算例については当日発表する。

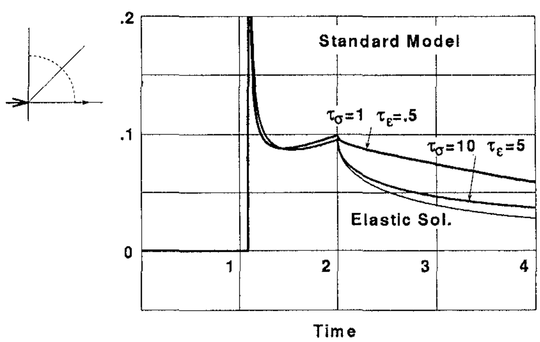

Fig.1 基本特異解 $G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)$ (x 軸上)

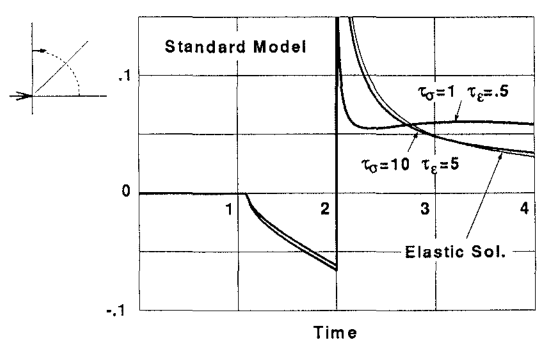

Fig.2 基本特異解 $G_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}|t)$ (y 軸上)

参考文献

[1] 福井卓雄，船戸慶輔: 粘弾性面外波動問題の時間領域境界要素法による解析，境界要素法論文集，第 12 巻，pp.69-74, 1995.