

I-A 108

2次元弾性床上板の分岐・局所化解析

東北大学 学生会員 水木 麻雄
宮城県 千田 徹也
東北大学 正会員 柳沢 栄司
東北大学 正会員 池田 清宏

1. はじめに

砂・粘土・岩・金属など各種の均質材料にはよく平行な縞模様の連続であるStripe Patternや雁行状に同一のきれつや滑り線が並ぶEchelon Modeを見ることができる。池田・室田は、この均質材料の破壊形態の変化を群論的分岐理論を用いその対称性の階層的な崩壊によるものであることを群論的分岐理論により示している^[1]。そこで本研究では、上下・左右の各境界で周期境界を持つ非線形バネ上に支持された非線形長方形板モデルが圧縮力を受ける場合分岐解析を行い、池田・室田の理論に基づき整理することとする。

2. 群論的分岐理論による対称性の崩壊の規則

長方形板の様な四角形領域の対称群の $C_{\infty V} \times \bar{C}_{\infty V}$ に同変な系は、

$$C_{\infty V} \times \bar{C}_{\infty V} \rightarrow \begin{matrix} DI_{n\bar{n}} \\ OB_{n\bar{n}} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} DI_{m\bar{m}} \\ OB_{m\bar{m}} \end{matrix} \rightarrow \dots \\ \rightarrow \begin{matrix} EC_{n\bar{n}kl} \\ EC_{m\bar{m}kl} \end{matrix} \rightarrow \dots$$

のような分岐階層構造を持つ。図1に各種の対称群を表す。DIはブロックの並びを持ったパターンで、OBは斜めの平行なせん断線を表し、ECはOBと異なった周期・方向を持った細かい滑り線の連続を表すと考えられている。図において、・や線は同じ物理量（ひずみ、応力）をもった点であることを示している。

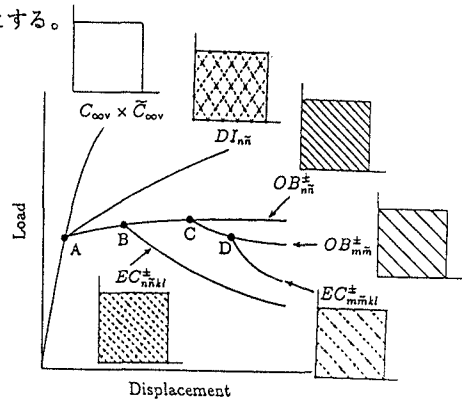


図1 分岐階層構造

3. 分岐解析

解析モデルは図2に示す、線形ばね定数 k ・非線形ばね定数 c による非線形弾性床上の長さ $a \times b$ の長方形板モデルを用いた。この系の全ポテンシャルエネルギー関数 V を

$$V = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + kw^2 - \frac{2}{3} cw^3 \right] dx dy \quad (1)$$

と与える。ただし、 D は曲げこわさ、 P は単位長さあたりの圧縮力である。第1項目は板の曲げによるひずみエネルギーの項で、第2項目は圧縮力のなす仕事、第3と4項目はバネの線形、非線形項によるエネルギーである。図2のモデルの z 方向の変位 w を無限周期境界を満たす二重Fourier級数により展開した解として、

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_{ij} \sin\left(2\pi \frac{ix}{a}\right) \sin\left(2\pi \frac{jy}{b}\right) + B_{ij} \cos\left(2\pi \frac{ix}{a}\right) \cos\left(2\pi \frac{jy}{b}\right) \right] \quad (2)$$

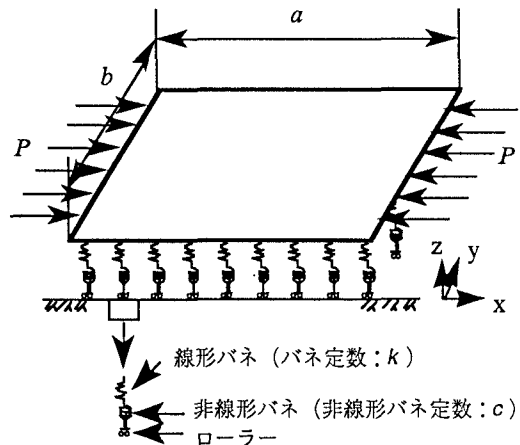


図2 解析モデル

と仮定する。ここで、 A_{ij} 、 B_{ij} は二重Fourier係数である。そこで、(1)式の全ポテンシャルエネルギー関数に式(2)を代入することにより得られる非線形釣合式および接線剛性行列を用いて、Newton-Raphson法による収束計算で荷重-変位関係を求めた。

3. 解析結果

主経路からのある一つの分岐点からは、Oblique Stripe PatternとDiamond Patternが枝分かれすることが確認された(図3)。主経路から直接分岐した経路上では、単一のモードが領域全体に広がり変形の局所化は観察されない。しかし、図4に示すようにOblique Stripe Patternからの二次分岐が他の方向・周波数の波が加わることでEchelon Modeに移行し、波形が崩れ対称性の崩壊あるいは破壊が進行していくのがわかる。

4. 最後に

今回、分岐経路の追跡に成功したケースはどれも低周波のモードばかりでEchelon Mode独特の変形パターンを十分観察できたとはいえない。これは、二重Fourier級数の項数を制限したことによる一種の離散化誤差の影響であると考えられる。また、この解析はポテンシャルエネルギーを利用した弾性範囲内での解析であって、大変形や亀裂をともしなう塑性域の分岐解析は追えていないのが現状である。しかし、前述したように分岐経路の探索において、分岐解の方向を群論的分岐理論により予め知っておくことは数値解析上非常に有効である。

[参考文献]

- [1] Kiyohiro IKEDA, Kazuo MUROTA and Masaki NAKANO; ECHELON MODES IN UNIFORM MATERIALS

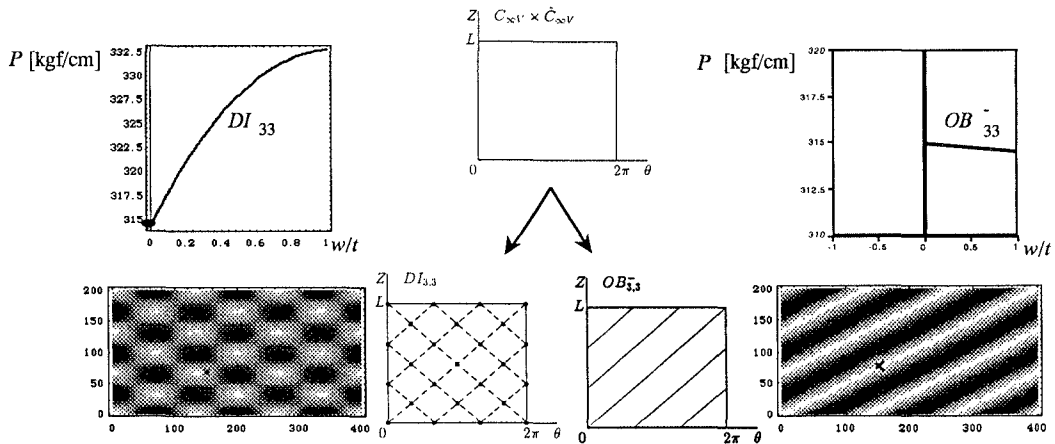


図3 主経路から DI_{33} 、 OB_{33} への分岐

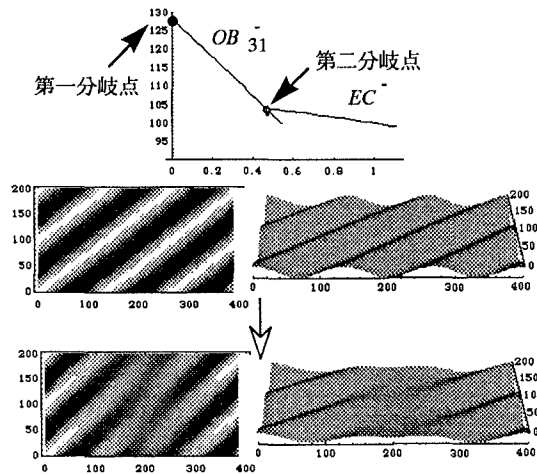


図4 OB_{31} から EC への分岐