土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

Ⅰ-A 107　定成分要素を用いた曲面形成手法に関する一考察

佐賀大学理工学部建設工学科　正会員　帯屋　洋之
大学院博士後期課程　学生員　劉　磊
理工学部土木工学科　シーウェイ
理工学部建設工学科　正会員　井嶋　克志
理工学部建設工学科　正会員　後藤　茂男

1.まえがき

有限要素構造物を対象とする曲面形成問題において、得られた解が持つべき力学的条件としては、

a）応力が均一であるか、あるいは合理的な幾何学的法則性に依存していること。

b）常時荷重下において曲げが発生しないこと。

などが挙げられる。さらに、実際の設計に用いる際の利便性、汎用性を考慮に入れるならば、

c）境界形状への制約が少なく、設計者のデザインコンセプトに対する自由度が確保されること。

d）剛性マトリックスの低次元化による演算時間の短縮が図れること。

e）要素寸法ができるだけ均一となること。

などの条件を備えた高精度な解析手法を用いるのが理想的である。

著者らは既に、三角形石鹸膜要素を用いた等張力曲面形状解析[1]、あるいは線長関数軸力線要素を用いた曲面形状解析[2]など、要素力が要素寸法の幾何学的変化に依存することにより発生する要素力剛性と、要素変形-節点変位間の適合条件の変化に起因する幾何剛性を用いて、材料剛性を持たない要素により成る有限要素構造物を解くことにより、上述の各条件を満たす曲面が得られることを確認している。

本研究は、各要素において離散化された辺軸力の 3 次元空間内の任意平面に対する投影成分が一定かつ投影面内等応力となる定成分三角形要素の定義を行い、得られる解の力学的および幾何学的特性を照査することにより、合理的な曲面形成のための一手法の提案を試みるものである。

2.定成分三角形要素を用いた形状解析における接線剛性方程式

接線剛性法よる形状解析を行う際の接線剛性方程式の一般式は以下のように表される。

$$\delta \boldsymbol{U} = (\delta \boldsymbol{S}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_G)\delta\boldsymbol{u} \tag{1}$$

$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{\alpha}$はそれぞれ節点力ベクトル、節点座標ベクトル、要素力ベクトル、および共通-要素座標系間の座標変換ベクトルである。要素力剛性マトリックス $\boldsymbol{K}_0$は、要素力が要素寸法の幾何学的変化に依存する場合に考慮されるものであり、要素力一定の条件下においては零マトリックスとなる。また、幾何剛性マトリックス$\boldsymbol{K}_G$は、要素力を辺軸力に変換した場合においては立体トラスの幾何剛性と同一の形となる。

ここで、図-1のように任意の投影面内で等応力となるような三角形要素を考えると、要素の辺軸力Nは辺軸力投影成分N_0、辺長ℓ、投影辺長ℓ_0を用いて、

$$N = N_0 \frac{\ell}{\ell_0} \tag{2}$$

のようになる。投影面内等応力の条件下においては、投影面直角方向の外力が作用した場合、投影面内方向には変位を生じないため、要素の投影寸法より決定するN_0およびℓ_0は一定となり、結果的に辺軸力は要素辺長に比例することになる。

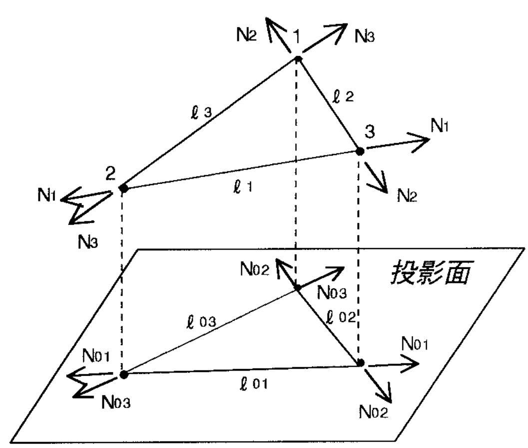

図-1　要素力と任意平面への投影成分

従って、一要素に関する接線剛性方程式は、

$$\delta\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = C\left(\begin{bmatrix} k_{02}+k_{03} & -k_{03} & -k_{02} \\ -k_{03} & k_{01}+k_{03} & -k_{01} \\ -k_{02} & -k_{01} & k_{01}+k_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{G2}+k_{G3} & -k_{G3} & -k_{G2} \\ -k_{G3} & k_{G1}+k_{G3} & -k_{G1} \\ -k_{G2} & -k_{G1} & k_{G1}+k_{G2} \end{bmatrix}\right)\delta\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$= C\begin{bmatrix} 2e & -e & -e \\ -e & 2e & -e \\ -e & -e & 2e \end{bmatrix}\delta\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$C = \frac{N}{\ell} = \frac{N_0}{\ell_0} = const., \quad k_{0i} = \alpha_i \alpha_i^T\Big|_{i=1,2,3}, \quad k_{Gi} = e - \alpha_i \alpha_i^T\Big|_{i=1,2,3} \qquad (4)\sim(6)$$

と表すことができ、(3)式は文献2)に示された線長比例軸力線と同様の完全な線形式となる。なお、α_i はi辺の方向余弦ベクトル、e は3×3の単位マトリックスである。よって、保存力系の外力に対しては、反復計算することなしに１回の計算で解を得ることができる。また、変位の発生しない投影面内方向２成分を拘束すれば、投影面直角方向１自由度系へ容易に低次元化することができ、演算時間の短縮に大きく寄与することとなる。

3.計算例

①　1辺を24分割した二つの三角形を直交させたかたちの空間四辺形の周辺を拘束し、この空間四辺形の両対角線を含む平面への要素力投影成分を一定とした場合の内力のみによる釣合形状を求めた（図-2）。この場合の節点力は保存力となるため線形計算となり、１回の計算で決定形状を得ることができる。

②　1辺4ｍ，12分割した正六角形のツインドームの形状を、拘束された周辺節点群を含む平面を投影面とし、投影面内－0.025tf/m の等圧縮力の条件で、0.015tf/m² の要素自重を載荷することにより求めた（図-3）。この場合は、節点力が要素の寸法変化とともに変化する非保存力となるため、反復計算が必要となるが、4回の反復で不平衡力が４桁小さくなるという安定した収束状況のもとに解を得ることができる。

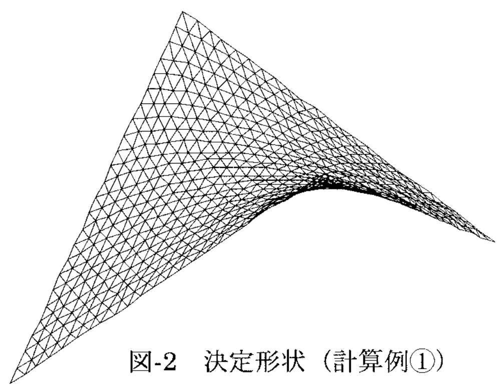
図-2　決定形状（計算例①）

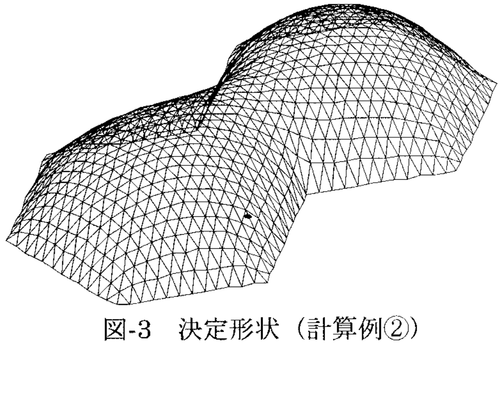
図-3　決定形状（計算例②）

4.まとめ

要素力の任意平面への投影成分が一定で、投影面内等応力となる定成分三角形要素は、線長比例軸力線要素の合理的な特性を持ち、さらに投影面直角方向１自由度系へ容易に低次元化できる。また、入力の際に各節点の投影面内位置を自由に設定できるため、特別な手法を用いることなく、メッシュの均一化を図ることが可能となる。

参考文献

1）帯屋洋之、劉磊、井嶋克志、後藤茂男：等張力曲面における接線幾何剛性：膜構造論文集94‘
2） K.Ijima,H.Obiya,S.Goto,G.Medved : Stable Forms of Single Layer Latticed Dome and its Geometrically Nonlinear Analysis,Preliminary Repoat Vol.Ⅱ of Stability of Steel Structures 1995