I-A 106　有限要素解析における応力評価法に関する一考察

九州工業大学工学部　正会員　山口栄輝
九州工業大学工学部　正会員　久保喜延

１．はじめに

構造解析の主目的のひとつに，応力状態を求めることが挙げられる．広範に用いられている有限要素法では，得られた節点変位にひずみ－節点変位マトリクス，さらに応力－ひずみマトリクスを乗じて応力を求めることが一般に行われている．しかしながら，この方法（以下では直接法と記す）では，厳密解と大きく異なる応力分布が得られることがあり，また要素間で応力が不連続となる．この問題に関しては，70年代より研究が進められており，応力プロジェクション（stress projection）法[1]やガウス積分点での応力をもとにした単純な補間法[2]（以下では単純補間法と記す）が提案されている．しかしながら，これらの手法は高次（特に二次）要素を念頭において開発されており，計算速度を上げるのに有利な低次（一次）要素にそのまま適用できるものではない．こうした点に鑑み，本研究では，４節点四角形要素にも適用可能な応力評価法を新たに提案し，数値計算によりその有効性を検証する．

２．応力プロジェクション法

この手法では次の連立一次方程式を節点応力ベクトル$\{\bar{\sigma}\}$について解くことになる[1]．

$$\left(\int_\Omega [N_\sigma]^T [N_\sigma] d\Omega\right)\{\bar{\sigma}\} = \int_\Omega [N_\sigma]^T [D][B]\{\bar{u}\}\, d\Omega \tag{1}$$

ここに，$[N_\sigma]$＝応力の形状関数マトリクス，$[D]$＝応力－ひずみマトリクス，$[B]$＝ひずみ－節点変位マトリクス，$\{\bar{u}\}$＝節点変位ベクトルである．任意点の応力は，得られた節点応力を形状関数で補間して求めることになる．

Hintonらは，応力の形状関数として，変位の形状関数よりも次数の低い関数の使用を提案し，良好な結果を得ている[3]．しかし，４節点四角形要素の場合，節点変位の形状関数より低次の関数は定関数となるため，このアプローチは不適切である．

３．単純補間法

文献２)で取り上げられているこの手法は，1974年にHintonらによって提案されており[3]，直接法で得た２ｘ２のガウス積分点での応力を双一次関数で補間することにより，２次の四角形要素（８節点四角形要素）内の応力分布を求めるものである．その後，Barlowが，直接法で求めた応力はこれらのガウス積分点で精度が良くなることを示し[4]，２ｘ２のガウス積分点での応力を用いる理論的根拠が明らかになった．

一般に，単純補間法では，直接法より精度良い応力が得られる．しかしながら，各要素内で応力の補間を行うため，要素間で不連続となる問題は残る．特に，４節点四角形要素の応力評価最適点は中央の１点のみであるため，単純補間法では要素内応力一定となり，要素間で大きな不連続性が生じる傾向がある．

４．提案する手法

式(1)は，直接法で求めた応力との差が最小，かつ全領域で連続となる応力分布を求めるものである[1]．これに対し，ここでは，直接法より単純補間法の精度が良いことに鑑み，単純補間法で求めた応力との差が最小となり，かつ全領域で連続となる応力分布を求める手法を提案する．これは，応力の形状関数に変位の形状関数と同じものを用い，式(1)に代えて，次式を解くものである．

$$\left(\int_\Omega [N_u]^T [N_u] d\Omega\right)\{\bar{\sigma}\} = \int_\Omega [N_u]^T \{\tilde{\sigma}\}\, d\Omega \tag{2}$$

ここに，$[N_u]$＝変位の形状関数マトリクス，$\{\tilde{\sigma}\}$＝単純補間法で求めた応力である．$[N_\sigma]=[N_u]$としているため，提案する手法は，低次要素への適用も可能である．

８節点四角形要素の場合，$\{\tilde{\sigma}\}$は双一次関数，$[N_u]$は２次関数である．したがって，式(2)の右辺を厳密に積分するには，２ｘ２のガウス積分公式を用いればよいことになる．ところで，単純補間法の記述より明らかなように，２ｘ２のガウス積分点では，直接法により求めた応力と単純補間法の応力が一致する．このため，式(1)で$[N_\sigma]=[N_u]$とし，その右辺を２ｘ２のガウス積分公式で計算すれば，式(2)と同じ結果が得られる．ちなみに，$[N_\sigma]=[N_u]$の場合，式(1)の右辺を厳密に積分するには３ｘ３のガウス積分公

式を用いることが必要である．同様のことを４節点四角形要素について考えると，ここで提案する手法は，式(1)の右辺を１ｘ１のガウス積分公式で評価するものになる．結局，本応力評価法は，式(1)で[N_σ]＝[N_u]とし，その右辺を次数低減積分で計算することと等価である．

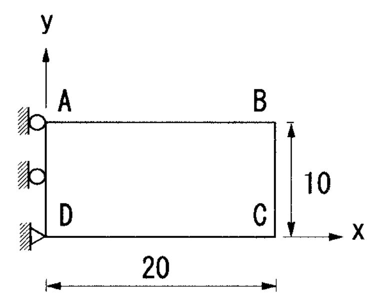
５．数値計算例

計算例として，単位の厚みを有する平板（図－１）を取り上げた．応力境界条件は下記を仮定した．

$$t_x = -300x,\quad t_y = 1000 \quad \text{on AB};\qquad t_x = -1200y - 2y^3,\quad t_y = -60y^2 \quad \text{on BC}$$

$$t_x = t_y = 0 \quad \text{on CD};\qquad t_y = 0 \quad \text{on DA}$$

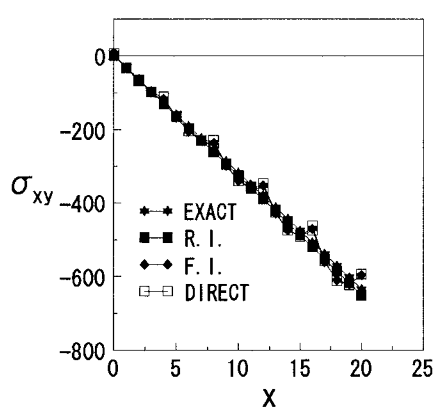
まず８節点四角形要素25個（＝５ｘ５）でこの板をモデル化し，解析した．応力評価に際しては，式(1)の右辺に２ｘ２のガウス積分公式を適用する方法（R. I.），３ｘ３を用いる方法（F. I.），直接法（DIRECT）の３種の計算を行った．R. I.，F. I. ともに[N_σ]＝[N_u]とした．R. I. がここで提案する応力評価法であり，F. I. は直接法による応力との差を最小にする，通常の応力プロジェクション法である．解析結果として，y=3.25に沿ったせん断応力分布を厳密解とともに図－２に示している．いずれの計算結果も厳密解と比較的良く一致しているが，特にR. I. の精度は高くなっている．同様の解析を４節点四角形要素100個（＝10ｘ10）で行った．この場合，R. I. では１ｘ１，F. I. では２ｘ２のガウス積分公式を用いた．計算結果を図－３に示しているが，F. I. とDIRECTでは大きな誤差が認められるのに対し，R. I. では厳密解にほぼ一致した結果を得ることができた．



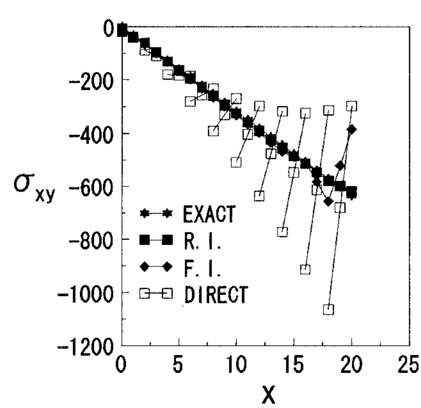
図－１　解析対象平板

参考文献

1) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method, 4th edn., Vol.1, McGraw-Hill, 1989.
2) Cook, R.D., Malkus, D.S. and Plesha, M.E.: Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd edn., John Wiley & Sons, 1989.
3) Hinton, E. and Cambell, J.S.: Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method, IJNME, 8, pp.461-480, 1974.
4) Barlow, J.: Optimal stress locations in finite element models, IJNME, 10, pp.243-251, 1976.



図－２　８節点四角形要素による計算結果
(y=3.25)



図－３　４節点四角形要素による計算結果
(y=3.25)