土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I-A 105　８節線を有する節点プリズム要素による３次元応力解析

函館工業高等専門学校　正会員　渡辺　　力
長岡技術科学大学　　　正会員　林　　　正

１．まえがき

有限要素法を用いた３次元応力解析では，解析対象が少し大きくなると連立方程式式の次元数が急激に増大して計算可能な問題の大きさに制約が生じる．それに対して，有限帯板法を３次元問題に拡張された有限プリズム法（FPM）では，変位関数数を工夫した大型の要素を用いることができるので大型構造物の解析に適している．しかし，節線方向に要素分割できないために，有限要素など他の要素と結合する場合や中間支点がある場合には解析が煩雑となる．

これらの問題を克服するために節点プリズム法（NPM）が開発された[1]．この解析法では有限プリズム要素に節点自由度を付加した要素を用いるので，有限要素との結合や中間支点などの境界条件の処理が容易となり有限プリズム法の適用範囲を大幅に拡張できる．

従来，節点プリズム要素には，8個の節点と6本の節線（内2本は bubble 節線）を有する要素が用いられていたが，この要素では bubble 節線の影響で要素内で応力が振動する傾向にあった[1]．そこで，本研究では，精度を改善する目的で，bubble 節線を用いずに断面内に1次，2次，3次の形状関数を用いた要素の開発を行った．本報告では，精度と計算効率の良い2次の形状関数を用いた要素について，精度と収束性，および有限要素との結合について検証した結果について報告する．

２．節点プリズム法

（１）節点プリズム要素

図-1 示す 16 個の節点と 8 本の節線を有する要素を用いる．要素の図心上に正規座標系（ξ,η,ζ）を定め，x 軸の原点側に 8 個と x 軸の原点側より $2a$ の位置に 8 つの合計 16 個の節点を設け，x 軸に平行に相対する節点を結ぶように 8 本の節線を設ける．

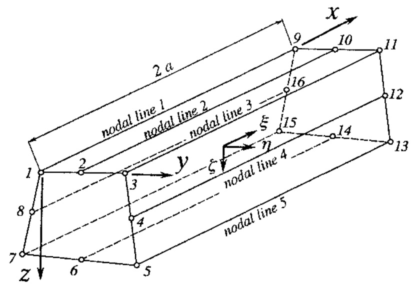

図-1　節点プリズム要素

（２）変位関数

要素の自由度として，節点と節線の要素座標軸（x, y, z）方向の並進変位 u, v, w を用いる．これより節点 n の一般化変位 $\boldsymbol{d}_n$ と，節線 i の第 m 項に関する一般化変位 $\boldsymbol{d}_{im}$ を次式で与える．

$$\boldsymbol{d}_n = \{\, u_n \quad v_n \quad w_n \,\}^T \;, \qquad \boldsymbol{d}_{im} = \{\, u_{im} \quad v_{im} \quad w_{im} \,\}^T \quad (m = 1,2,3\cdots) \tag{1}$$

式(1)を要素の全節点と全節線について集めたものを，それぞれ $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_m$ として次式で表す．

$$\boldsymbol{d}_0 = \{\, \boldsymbol{d}_1{}^T \quad \boldsymbol{d}_2{}^T \cdots \boldsymbol{d}_{16}{}^T \,\}^T \;, \qquad \boldsymbol{d}_m = \{\, \boldsymbol{d}_{1m}{}^T \quad \boldsymbol{d}_{2m}{}^T \cdots \boldsymbol{d}_{8m}{}^T \,\}^T \tag{2}$$

任意点（ξ,η,ζ）の変位成分は節点変位と節線変位の和によって次式で表される．

$$\left.\begin{aligned} u(\xi,\eta,\zeta) &= \{\boldsymbol{f}_{01}(\xi,\eta,\zeta)\}^T \boldsymbol{d}_0 + \{\boldsymbol{f}_{11}(\eta,\zeta)\}^T \sum X_m(\xi)\boldsymbol{d}_m \\ v(\xi,\eta,\zeta) &= \{\boldsymbol{f}_{02}(\xi,\eta,\zeta)\}^T \boldsymbol{d}_0 + \{\boldsymbol{f}_{12}(\eta,\zeta)\}^T \sum X_m(\xi)\boldsymbol{d}_m \\ w(\xi,\eta,\zeta) &= \{\boldsymbol{f}_{03}(\xi,\eta,\zeta)\}^T \boldsymbol{d}_0 + \{\boldsymbol{f}_{13}(\eta,\zeta)\}^T \sum X_m(\xi)\boldsymbol{d}_m \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ここに，$\boldsymbol{f}_{0i}$ は節点に関する形状関数ベクトルで，形状関数には１次の形状関数（ξ）と８節点のセレンディピティーの形状関数（η, ζ）とを組み合わせたものを用い，節線の形状関数ベクトル $\boldsymbol{f}_{1i}$ の形状関数には8節点のセレンディピティーの形状関数を用いる．展開関数 X_m は文献1)と同じ多項式を用いる．

３．数値計算例

数値計算例として，図-2 に示すような等分布荷重を受ける相対する２辺が単純支持で他の２辺が自由の正方形厚板（b/a=0.5，ポアソン比 ν=0.3）を計算する．中央断面のたわみと応力を Spline Prism 法[2]（SPM）と，長手方向の応力を細分割した FEM 解と比較する．なお， Spline Prism 法では板の 1/2 領域を分割数 Mx=My=12，スプライン次数 k-1=4，級数項 r=31 と細分割した値を用いる[2]．また，FEM では，1/4 領域を 20 節点要素を用いて 10×10×10 に細分割したときの図心点の応力を用いる．

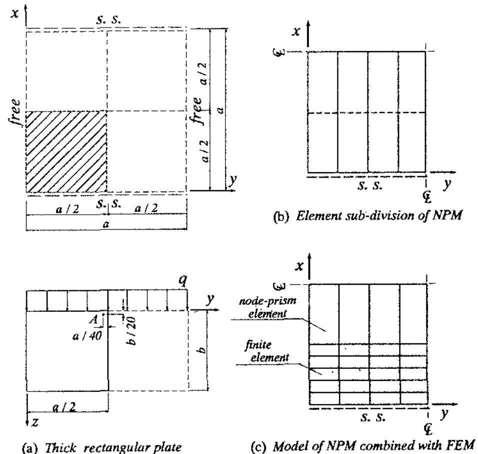

図-2　長方形厚板

（1）精度と収束性

本要素の精度と収束性を確認するために，図-2(b)のように1/4領域を断面（y,z）内に4×4に分割し，長手方向には分割しない（MX=1）場合と2分割した（MX=2）場合の$x=a/2$, $y=a/2$でのたわみwと応力σ_xを表-1に示す．長手方向に分割しないMX=1でも，変位は級数に1項も用いると良い値が得られており，3項で収束している．応力は級数に3項用いるとSPMとの誤差は1%以下であり，約5項でほぼ収束している．長手方向に分割するMX=2では，MX=1に比べ収束性がよく，応力は3項でほぼ収束しており，そのときの誤差は1%以下である．

図-3には，MX=2とした場合の長手方向のA線上のσ_xを示す．級数に1項用いただけでFEM解と良く一致している．また，要素の分割点では級数に1項では若干不連続となっているが，3項も用いると連続している．

（2）有限要素との結合について

次に図-2(c)のように1/4領域の半分を5×4×4（x, y, z)に分割した20節点の有限要素で，残り半分を1×4×4に分割した節点プリズム要素を用いて解析した．図-4にはA線上の直応力σ_x, σ_y, σ_zを示す．NPMでは級数に1,3,5項と用いた．級数に3項も用いるとFEMとの結合部は連続しており，細分割したFEM解と良く一致している．

以上の計算例で用いた応力の計算値には，平滑化の手法は用いていない．

本研究は，節点プリズム要素の精度と収束性，および有限要素との結合を確認する目的で行っているが，本解法は，構造物の全体解析で本来の長所が生かされる．今後，プログラムを改良し，隔壁を有する箱桁橋やPC斜張橋の主塔などの3次元応力解析に本解法を適用していきたい．

表-1　長方形厚板のたわみと応力

MX	Terms	w (×qb/E) z=0	w z=b/2	w z=b	σx (×q) z=0	σx z=b/2	σx z=b
1	1	3.683	3.605	3.222	-3.398	0.103	3.494
	3	3.771	3.618	3.270	-3.235	0.039	3.131
	5	3.776	3.618	3.270	-3.230	0.000	3.167
	7	3.777	—	—	-3.213	0.002	3.167
2	1	3.769	3.618	3.264	-3.332	-0.009	3.307
	3	3.778	3.618	3.270	-3.224	0.003	3.167
	5	3.778	—	3.270	-3.228	0.003	3.168
	7	—	—	—	-3.228	—	3.168
SPM		3.781	3.633	3.281	-3.260	-0.020	3.161

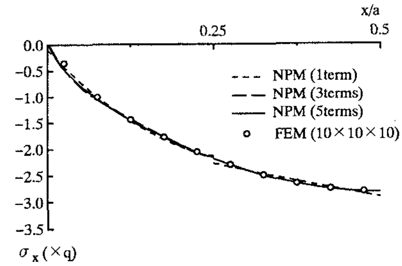

図-3　長方形厚板のA線上の応力

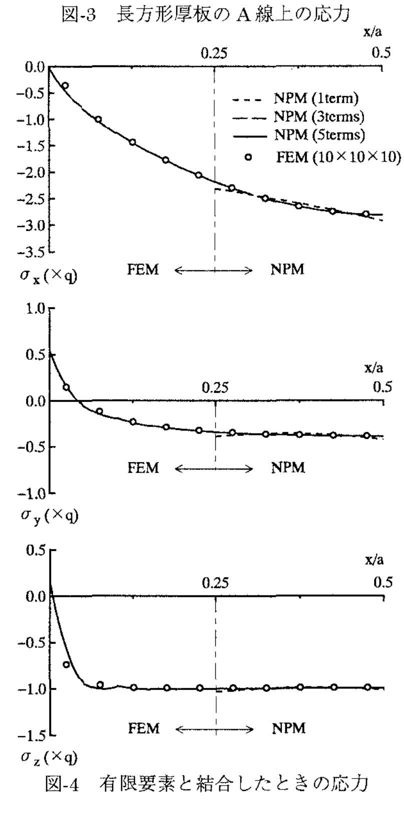

図-4　有限要素と結合したときの応力

参考文献

1) 林　正・小林　亨市：節点プリズム法による3次元応力解析，土木学会論文集 NO.450/I-20, 1992

2) 水澤　富作・高木　信治：Spline Prism 法を用いた長方形厚板の三次元曲げ解析について，土木学会論文集 NO.480/I-27, 1994