土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I-A 104

Hashin-Shtrikman 変分原理に基づく弾塑性解析手法の提案

新日鐵(株)　正　員　榎 裕二
東京大学　　正　員　堀 宗朗

1. はじめに

計算機や有限要素法の発達により、弾塑性解析が実務レベルで利用されつつある。主要なターゲットに破壊過程の再現があるが，構成則に軟化域が含まれ変形の局所化現象が起こる場合，分岐解析や安定解析が要求されることがあり，膨大な数値計算が必要となる．さらに，材料や構造のインパーフェクションの結果，不安定な破壊過程にはばらつきも多くなる．したがって，ばらつきを無視し理想的な状況を想定した解析の結果の有用性には疑問が残る．

上記の点を背景とし，本研究では，弾塑性変形を過大・過小評価し，その範囲を正しく与える近似解を与える解析手法の構築を試みる．最初に，材料の有効物性の範囲を推定する Hashin-Shtrikman 変分原理を一般化し，解析手法の理論を構築する．これは，増分形式で弾塑性解析を行う場合，場所毎に異なる接線剛性を持つ不均一体と見なすことができるためである．ついで一般化された変分原理の妥当性を棒部材で検証する．最後に，変分原理を有限要素法に組み込み，簡単な弾塑性連続体の例題を解き，解析手法の有効性を検証する．

2. 解析理論

増分形式弾塑性解析を念頭に，不均一線形弾性体の境界値問題を考える．簡単のため，弾性体を V，弾性係数を $C_{ijkl}(\boldsymbol{x})$ とし，境界 ∂V で変位 $\overline{u}_i$ が与えられる．微小変位と物体力が 0 であることを仮定する．V の変位場 $u_i(\boldsymbol{x})$ は，$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,i}=0$ を支配方程式とする境界値問題を満たす．

この支配方程式を解く代わりに，一様な基準弾性係数 C^o_{ijkl} を持つ仮想的な均一体 V^o を設定し，Hooke 則を次のように書き換える．

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})=C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\epsilon_{kl}(\boldsymbol{x})=C^o_{ijkl}\epsilon_{kl}(\boldsymbol{x})+\sigma^*_{ij}(\boldsymbol{x}) \quad\cdots\cdots (1)$$

ここで，ϵ_{ij} と σ_{ij} はひずみと応力，s^*_{ij} は C_{ijkl} と C^o_{ijkl} の差を補うよう導入されたアイゲン応力である．この結果 V^o の変位場の支配方程式は，$C^o_{ijkl}u_{k,li}+\sigma^*_{ij,i}=0$ となる．したがって，$\sigma_{ij}=0$ として $\overline{u}_i$ から決まる変位場を u^h_i，∂V で変位を 0 とするグリーン関数を g^o_{ip} とすると，重ね合わせの原理より，境界値問題の解は，

$$u_i(\boldsymbol{x})=h^h_i(\boldsymbol{x})+\int_{V^o}g^o_{ip}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sigma_{ij,i}(\boldsymbol{y})dV_{\boldsymbol{y}} \quad\cdots\cdots (2)$$

となる．適切な g^o を用いることで，式 (2) は任意の V の境界値問題に適用できる．

σ^*_{ij} の代わりに別のアイゲン応力 s^*_{ij} を分布させた境界値問題でも，変位場は式 (2) の形式で与えられる．ここで，アイゲン応力の作るひずみ場を $\gamma^o_{ij}(\boldsymbol{x},s^*)$ によって表し，次のアイゲン応力の汎関数を定義すると，

$$J(\boldsymbol{s}^*;\boldsymbol{C}^o)=\int_V\frac{1}{2}s^*_{ij}\left((\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^o)^{-1}_{ijkl}s^*_{kl}-\gamma^o_{ij}(s^*)-2\epsilon^h_{ij}\right)dV \quad\cdots\cdots (3)$$

J のオイラー式は式 (1) と一致する．ここで，$J(\boldsymbol{\sigma}^*=\int_V(\sigma^h_{ij}\epsilon_{ij}-\sigma_{ij}\epsilon_{ij})/2dV$ であり，$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^o)_{ijkl}$ が正・負定値となる基準弾性を用いると，J が下・上に凸になることから，V の全ひずみエネルギー E に関する次の不等式が成立する。

$$E^{h+}-J(\boldsymbol{s}^*;\boldsymbol{C}^{o+})<E<E^{h-}-J(\boldsymbol{s}^*;\boldsymbol{C}^{o-}) \quad\cdots\cdots (4)$$

ここで、E^h は u^h_i が作るひずみエネルギーであり，上添字 $\pm$ は $(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^o)_{ijkl}$ が正・負定置である場合を表す．したがって、σ^*_{ij} を近似する s^*_{ij} を用いると、上の不等式 (4) から、全エネルギーの上下限を与える場が作られることが分かる。これが一般化された Hashin-Shtrikman の変分原理である。

3. 例題：弾塑性棒材

一般化された Hashin-Shtrikman 変分原理を適用して，接線係数 G がたわみ角 θ に応じて G^e $(\theta < \theta_y)$ ないし G^p $(\theta > \theta_y)$ と変わる長さ L の棒材の変形を考える．棒を仮想的に弾性 G^o の一様部材とし, 区分的に一様なアイゲン応力場と，$G - G^o$ を正・負にする弾性を用いて，汎関数の停留値を近似的に計算する．この結果得られるたわみの近似解を図２（２分割）と図３（10 分割）に示す。正解の上下限が得られ，また近似を良くすると上下限の範囲がせばまることが示されている．

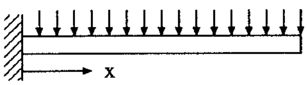

図 1　解析対象:棒材

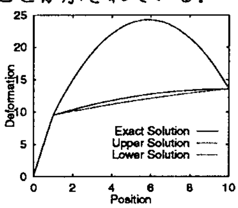

図 2　たわみ分布: 2 分割

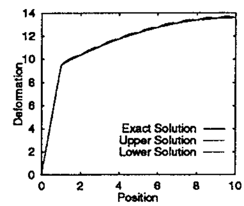

図 3　たわみ分布: 10 分割

4. 例題：弾塑性連続体

Hashin-Shtrkman 変分原理を有限要素法に組み込み，汎用的な増分形式の解析手法の構築を試みる．各増分で接線弾性係数 $C^{ep}_{ijkl}(x)$ が与えられれば、式 (3) のひずみ場とアイゲン応力場を次の増分形式で書き直せば，J が全増分ひずみエネルギーの上下限を与えることになる．

$$\dot{J}(s^*;C^o) = \int_V \frac{1}{2}\dot{s}^*_{ij}\left((C^{ep}-C^o)^{-1}_{ijkl}\dot{s}_{kl} - \gamma^o_{ij}(\dot{s}^*) - 2\dot{\epsilon}^h_{ij}\right) dV \quad \cdots\cdots (5)$$

流れ則に従う弾塑性連続体をこの汎関数を用いて解析する．アイゲン応力場の近似解を用いると，応力場が近似されるため，正しい接線弾性係数を推定できない．近似解の応力場から決定される接線弾性係数が正解の接線弾性係数の上下限となることが期待されるため，次の不等式を仮定する．

$$\dot{J}(s^*;C^o;\sigma^-) < \dot{J}(s^*;C^o;\sigma) < \dot{J}(s^*;C^o;\sigma^+) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

図 4で示す例題を考える．分割数や構成則を変えて解析したときの加重-変位曲線を図に示す。正解が挟まれていることがわかる．

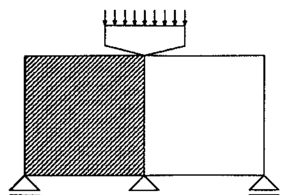

図 4　解析対象:連続体

表 1　材料定数：弾性

ヤング率 E	2×10^5 [MPa]
ポアソン比 ν	0.3
弾性限界 σ^e	2×10^2 [MPa]

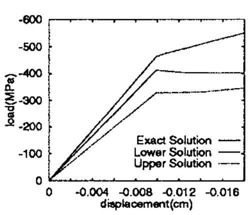

図 5　von Mises(3×3 分割)

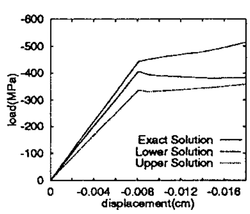

図 6　von Mises(9×9 分割)

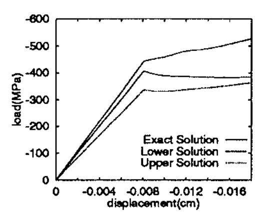

図 7　Drucker-Prager(硬化)

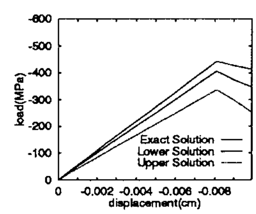

図 8　Drucker-Prager(軟化)

5. おわりに

Hashin-Shtrikman 変分原理を弾塑性解析に適用した解析手法によって荷重－変位曲線に関して正解の上下限となる近似解が得られることが示された。今後の課題として、より強い変形の局所化を伴う問題への適用と材料・構造にばらつきのある弾塑性解析への適用を考えている。

参考文献

1) スニル　ムナシンゲ、堀　宗朗：サブストラクチャ法による弾塑性解析の基礎的研究、数値計算シンポジウム、1995。
2) 岡村　甫、前川　宏一：鉄筋コンクリートの非線形解析と構成則、技報堂出版、1991。
3) S. Nemat-Nasser and M. Hori: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, New York, 1993.
4) 山口　栄輝、堀　宗朗、久保　喜延：等価介在物法を用いた平面骨組構造物の弾塑性解析、構造工学論文集 Vol. 41A、pp. 9-14、1995。
5) 安部　剛史、山口　栄輝、堀　宗朗、久保　喜延：等価介在物法に基づいた弾塑性有限要素解析手法、土木学会年次学術報告集、I、1995。