

I-A 100

二段階制御法を用いた不安定ケーブルの構造解析

熊本大学 学生員 東 高徳
 熊本大学 正 員 小林 一郎
 熊本工業大学 正 員 三池 亮次
 熊本大学 学生員 橋本 淳也

1. はじめに 折線ケーブルは通常不安定な構造である。そのため、折線ケーブルに外力が作用するときの”形態決定問題”について様々な手法が用いられてきた。後藤¹⁾や波田²⁾らは、接線剛性マトリックスを用い荷重制御法に従って大変形構造解析をおこなっている。しかしながら、部材応力が零、または零に近い場合には、接線剛性マトリックスは特異または疑似特異となり解が不能、または、収斂が悪くなる。この問題を解決するために我々はさきに2段階制御法³⁾を提案した。

第1段階として、不安定次数だけ、ある節点方向に変位（制御変位）を与え静定とする。この制御変位方向の反力を求める。第2段階として、制御変位方向の与えられた外力と、第1段階において得られる制御変位方向の計算反力との不釣り合い力を解消するように、制御変位方向以外の外力の増分は零の条件の下で接線剛性マトリックスの修正と、荷重制御法による第2段階増分変位を求める。これを繰り返し、ケーブルの釣り合い力を決定する。

2. 大変形構造解析の基礎式 筆者らは先に有限変位仮想仕事の定理に従って、接線マトリックスを用いた次のような大変形構造解析の基礎式を誘導した。すなわち、変形の間状態の荷重 $\mathbf{P}'$ からの増分荷重 $\Delta \mathbf{P}$ と、変形 $\mathbf{d}'$ からの増分変位 $\Delta \mathbf{d}$ のあいだに

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{b} \quad (1)$$

があるとする。ここに $\mathbf{K}$ は変形後の剛性マトリックス、 $\mathbf{b}$ は有限変位に関する補正項であり、

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})^T \quad (2)$$

$$\mathbf{b} = \Delta \mathbf{C} \mathbf{P}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}) \mathbf{K}_m \Delta \mathbf{e}_\theta \quad (3)$$

$\mathbf{C}'$ は中間状態における接線マトリックス、 $\Delta \mathbf{C}$ はその増分、 $\mathbf{K}_m$ は応力として軸力のみの場合には、 $k = EA'_I/L'_I$ を要素とする対角マトリックス、 E はヤング率、 A は断面積、 L は部材長で添字 I は第 I 部材、プライム $'$ は中間状態における値であることを示す。添字 T は転置記号である。 $\Delta \mathbf{e}_\theta$ は、大変形ひずみの補正項であり、変形の間状態からの部材回転角を $\Delta \theta_I$ とすると、第 I 部材のひずみ補正項 $\Delta \mathbf{e}_{\theta, I}$ は、

$(1 - \cos \Delta \theta_I) L'_I$ を要素とするベクトルとなる。変形後の接線マトリックス $\mathbf{C} = \mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C}$ であり、変形後の断面力 $\mathbf{P}_m$ と $\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \Delta \mathbf{P}$ の間には、次式が成立する。なお、変形後の変位は $\mathbf{d} = \mathbf{d}' + \Delta \mathbf{d}$ である。

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \mathbf{P}_m \quad (4)$$

中間状態における $\Delta \mathbf{P}$ の変分は、

$$\delta \Delta \mathbf{P} = \mathbf{K}_T \delta \Delta \mathbf{d}, \quad \mathbf{K}'_T = \mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G \quad (5)$$

となる。ここに、 $\mathbf{K}'_E$ 弾性剛性マトリックス、 $\mathbf{K}'_G$ は幾何剛性マトリックス、 $\mathbf{K}'_T$ は接線剛性マトリックスであり、

$$\mathbf{K}'_G = \left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_{\Delta \mathbf{d}=0} \mathbf{P}'_m \quad (6)$$

となる。ここに $\left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]$ は立体マトリックスであり、

$$\left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta \mathbf{d}} \right]_{\Delta \mathbf{d}=0}$$

$$\mathbf{P}'_m = \left[\frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta d_1} \mathbf{P}'_m, \frac{\partial (\mathbf{C}' + \Delta \mathbf{C})}{\partial \Delta d_2} \mathbf{P}'_m, \dots \right]_{\Delta \mathbf{d}=0} \quad (7)$$

である。接線マトリックスの場合は、 $\mathbf{C}$ を構成する部材の方向余弦ベクトルの微分として容易に求めることができる。

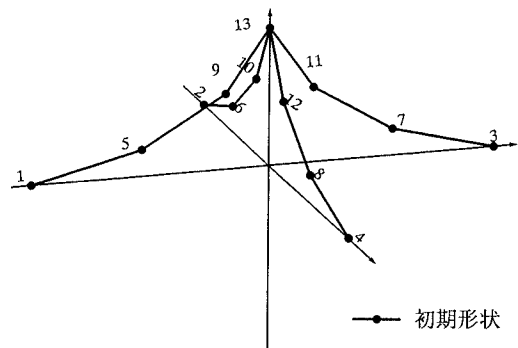


図-1 12部材立体ケーブル

式(1)に基づいて図-1に示すような12部材立体ケーブルの構造解析を試みた。断面積 $A = 1.0 \text{ cm}^2$ 、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ とし、固定点である1、2、3、4の節点を除く節点に鉛直下向きに 100 kgf の

荷重を載荷した。この時の釣り合い形状を解析した。また、このモデルは不安定次数15であるから15の制御変位を与えた。図-2は解析結果であり、点線が最終的な釣り合い形状である。

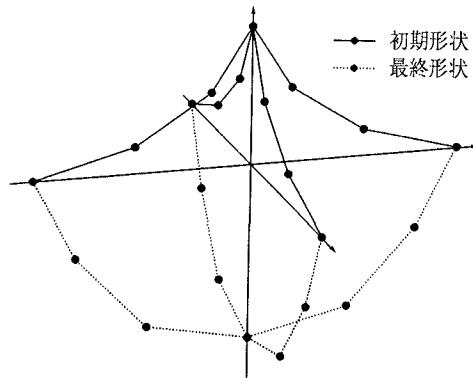


図-2 12部材立体ケーブル解析結果

3. ケーブルの運動 ケーブルの増分形運動式は、(1)式において（質量×加速度）を慣性力と考えて、これを、外力として左辺に組み込むことによって得られる。計算の第 $I+1$ ステップの加速度ベクトル $\Delta \mathbf{a}_{I+1}$ は第 $I+1$ ステップにおける荷重と変位の増分を $\Delta \mathbf{P}_I, \Delta \mathbf{d}_I$ とすると、

$$\Delta \mathbf{a}_{I+1} = \left\{ \left(\frac{\Delta \mathbf{d}_{I+1}}{\Delta t} - \frac{\Delta \mathbf{d}_I}{\Delta t} \right) - \left(\frac{\Delta \mathbf{d}_I}{\Delta t} - \frac{\Delta \mathbf{d}_{I-1}}{\Delta t} \right) \right\} \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (\Delta \mathbf{d}_{I+1} - 2\Delta \mathbf{d}_I + \Delta \mathbf{d}_{I-1}) \quad (8)$$

また簡単のために、質量は折線ケーブルの節点に集中、質量マトリックスを $\mathbf{M}$ として、第 I ステップにおける運動方程式は (8) 式を (1) 式に代入し次のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{I+1} \right) \Delta \mathbf{d}_{I+1} + \mathbf{b}_{I+1} \\ &= \Delta \mathbf{P}_{I+1} + \mathbf{M} (2\Delta \mathbf{d}_I - \Delta \mathbf{d}_{I-1}) / \Delta t^2 \\ &\equiv \Delta \mathbf{f}_{I+1} \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式の $\mathbf{K}_{I+1}, \mathbf{b}_{I+1}$ は $I+1$ ステップにおける変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{I+1}$ の関数であるので、これを $\Delta \mathbf{d}_{I+1}$ に関して Taylor 展開すると、接線剛性マトリックス $\mathbf{K}_T$ を用い、

$$\left(\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} + \mathbf{K}_{T,I+1} \right) \delta \Delta \mathbf{d}_{I+1} = \delta \Delta \mathbf{f}_{I+1} \quad (10)$$

となる。

式 (9) に基づいて図-3に示す移動節点をもつ3部材ケーブルの解析をおこなう。断面積 $A = 1.0 \text{ cm}^2$ 、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、質量マトリックス $\mathbf{M} = 1.0 \text{ kg}$ とする。荷重は2、3節点に鉛直下向きに 100 kg を載荷している。1節点は固定点とし、4節点を x 軸方向に左右に移動させている。この時2、3

節点は図-3に示すような挙動となった。図の実線が $\mathbf{M} = 0 \text{ kg}$ の挙動である。この時2、3の節点は同じ位置を移動していることがわかる。破線は $\mathbf{M} = 1 \text{ kg}$ の時 $x(\text{cm})$ (正方向) に節点が移動したときの挙動である。実線に比べると移動に対し遅れが生じているのがわかる。2点鎖線は $\mathbf{M} = 1 \text{ kg}$ の時 $x(\text{cm})$ (負方向) に節点が移動したときの挙動である。この場合も実線に対して移動節点が負方向に移動しているが慣性力が働いて遅れが生じているのがわかる。

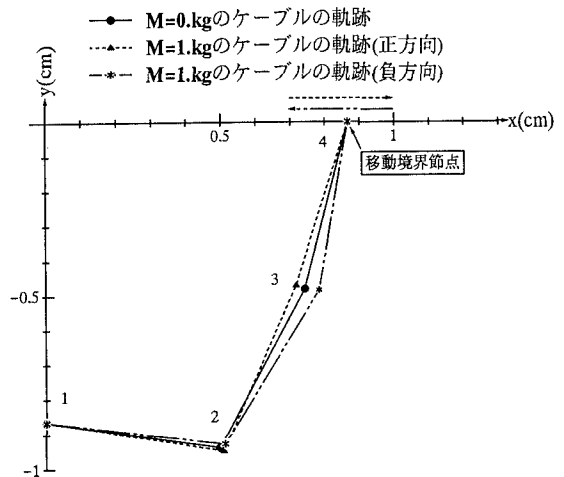


図-3 3部材ケーブル解析結果

4. まとめ 2段階制御法により通常解析が困難な不安定な折れ線ケーブルの解析が可能であることがわかった。また、大変形構造解析の基礎式に加速度項を導入し定式化をおこない、その式によりケーブルの動的な解析もおこなえることがわかった。今後の課題として、複雑な多部材の折れ線ケーブルに対する制御変位の与えかたに検討の余地があるように思われる。

最後に本研究の解析をおこなうに際して、元熊本大学学生（現大分市役所勤務）佐藤洋輔君のご協力を得たことを記し謝意を表す。

5. 参考文献

- 1) 後藤茂夫他、非線形有限変形法によるトラスの大変形解析とその応用プログラム、土木学会論文報告集、194号、1971
- 2) 波田凱夫他、曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析、土木学会論文報告集、318号、1982
- 3) 佐藤、小林、三池、東、二段階制御法による折れ線ケーブル構造解析、構造工学における数値解析法シンポジウム、1995