

I-A 99

骨組構造解析に適用可能なソリッド有限要素の開発

長岡技術科学大学 学生会員 伊藤治郎
 長岡技術科学大学 正 会 員 岩崎英治
 長岡技術科学大学 正 会 員 林 正

1. まえがき

ソリッド要素を用いた有限要素法は、複雑な形状を有する構造や欠陥近傍あるいは隅角部のように解が複雑に変化する部分でも、要素分割を細かくすると精度の良い解を得ることができ、汎用性に優れた解析法である。しかし、梁のような細長い部材をソリッド要素で解析すると、骨組要素による解と同程度の解を得るにも、骨組要素よりも多くの要素数を必要とすることから、構造物の全体解析を行う場合には、非常に多くの要素数を必要とし、実用的な解析法ではない。このため、骨組構造のように1次元的な部材では、骨組要素が用いられる。しかし、部材の結合部や形状が急激に変化する部分での応力集中などの解の急変状況を正確に知ることはできない。そこで、本報告では、要素分割を細かくすると、このような解の変化を求めることができ、骨組要素と同程度の要素分割で、骨組要素による解と同程度の精度の解が得られるようなソリッド要素を開発する。なお、ここで比較の対象とする骨組要素は、低次 Timoshenko はり要素である。

2. ソリッド要素

図-1のような x と y 方向の長さがそれぞれ $2a$, $2b$ の長方形要素を考える。このとき、座標 (x, y) の他に、 $-1 \sim 1$ の範囲の値をとる座標 (ξ, η) を導入する。要素内の x, y 方向変位 u, v は、 ξ, η から、次のように表される。

$$u = U_0 + \xi U_1 + \eta U_2 + \xi \eta U_3, \quad v = V_0 + \xi V_1 + \eta V_2 + \xi \eta V_3 \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、 U_i, V_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は、節点変位で表される。

これより、ひずみ $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy}$ は、次のように表される。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{U_1}{a} + \eta \frac{U_3}{a}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{V_2}{b} + \xi \frac{V_3}{b}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{U_2}{b} + \frac{V_1}{a} + \xi \frac{U_3}{b} + \eta \frac{V_3}{a} \quad \cdots \cdots (2)$$

Bernoulli-Euler 梁理論が適用可能な程度に細長い部材では、せん断ひずみは $2\varepsilon_{xy} \div 0$ となる。このとき、上式の第3式より、変形モードに次の拘束が課せられる。

$$\frac{U_2}{b} + \frac{V_1}{a} \div 0, \quad \frac{U_3}{b} \div 0, \quad \frac{V_3}{a} \div 0 \quad \cdots \cdots (3)$$

ところで、式(2)第1,2式の U_3, V_3 は、曲げ変形モードを表しているが、上式の拘束条件より、これらの変形が拘束されることになり、細長い部材の解析では、これらの曲げ変形を表現できない。これはせん断ロッキングとして知られているが、式(2)の第3式を、

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{U_2}{b} + \frac{V_1}{a} + \delta_\eta \xi \frac{U_3}{b} + \delta_\xi \eta \frac{V_3}{a} \quad \cdots \cdots (4)$$

と表し、パラメータ δ_ξ, δ_η を導入する。これらのパラメータは、梁部材の部材軸が ξ 軸に平行な場合には、 $\delta_\xi = 1, \delta_\eta = 0$ 、 η 軸に平行な場合には、 $\delta_\xi = 0, \delta_\eta = 1$ とおくと、それぞれ部材軸の曲げ変形モードを拘束条件から除去でき、せん断ロッキングを緩和できる。

このようなロッキングを避ける要素は種々開発されている。ここで問題になるのは、ひずみエネルギーに寄与しないゼロエネルギーモードの発生であり、ロッキングとゼロエネルギーモードを生じない要素も種々開発されている^{1), 2)}。本文に示したひずみから求めた剛性方程式にも、これらの研究と同様に、ロッキングとゼロエネルギーモードを回避できているが、これだけでは骨組要素と同程度の要素分割で同程度の精度の解を得られない。これは、細長い部材での、1軸応力状態を正確に表現できないためである。そこで、1軸応力状態を表現可能な応力ひずみ関係を用いる。

等方弾性体の応力ひずみ関係は、平面ひずみ状態、平面応力状態でそれぞれ次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \cdots (5)$$

この関係式を、ひずみの式(2),(4)の ξ, η に関する定数項に適用し、残りのひずみ成分には、平面ひずみ状態、平面応力状態それぞれ、次のような関係式を用いる。

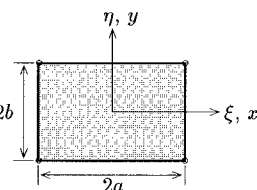


図-1 長方形要素

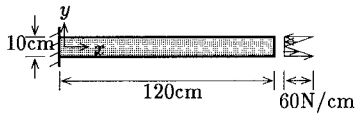


図-2 計算例

表-1 要素の種類

No.	element
1	Full integration
2	Reduced integration
3	Proposed ($\delta_\xi = \delta_\eta = 1$)
4	Proposed ($\delta_\xi = 1, \delta_\eta = 0$)
5	Koh & Kikuchi ($\delta_v = \delta_\xi = 1, \delta_\eta = 0$)
6	Koh & Kikuchi ($\delta_v = 0, \delta_\xi = 1, \delta_\eta = 0$)
7	Liu, Hu & Belytschko

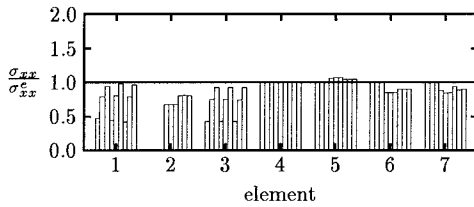
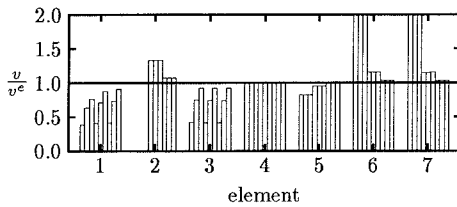


図-3 片持ち梁 ($\nu = 0.3$)

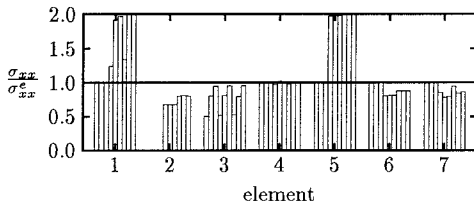
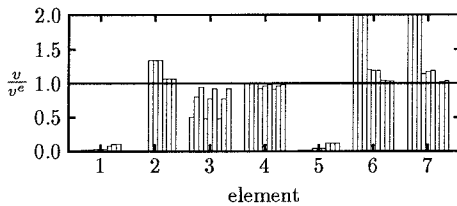


図-4 片持ち梁 ($\nu = 0.499$)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1+\nu) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

このような応力ひずみ関係を用いると、非圧縮またはほとんど圧縮しない材料の解析で問題になる非圧縮ロッキングも緩和される。

3. 計算例

図-2の片持ち梁の自由端にモーメント荷重が作用したときの自由端中央 ($x = 120\text{cm}$, $y = 0\text{cm}$) の点の y 方向変位 v と、($x = 20\text{cm}$, $y = 5\text{cm}$) の点の応力 σ_{xx} を表-1のような7種類の要素により求める。これらの要素の内、せん断ロッキングを緩和できる要素は、要素 2, 4, 5, 6, 7 であり、非圧縮ロッキングを緩和できる要素は、要素 2, 3, 4, 6, 7 である。しかし、要素 2 にはゼロエネルギーモードが含まれるため、厚さ方向に要素分割を行わなければ、剛性行列が特異になり解が得られない。なお、平面ひずみ状態を仮定し、ヤング係数は、 $E=20\text{kN/cm}^2$ 、ポアソン比は $\nu = 0.3$ と $\nu = 0.499$ の場合を考える。Koh & Kikuchi の要素の δ_v は、非圧縮によるロッキングを避けるためのパラメータで、 $\delta_v = 0$ とおくとこのロッキングを避けられる。図-3,4に各要素の要素分割数を変えたときの結果を示す。これらの図は、要素分割数を x と y 方向それぞれ、 6×1 , 12×1 , 24×1 , 6×2 , 12×2 , 24×2 , 6×4 , 12×4 , 24×4 と変えたときの結果を各要素毎に並べている。

これらの図より、せん断ロッキングと非圧縮ロッキングを緩和する Koh & Kikuchi や Liu らの要素では、高精度の解を得るには、厚さ方向にも要素分割を行う必要があるが、本研究で開発した要素 4 は、高さ方向の要素分割を行わなくても高精度の解を得ていることが分かる。また、Koh & Kikuchi の要素では、パラメータの与え方 ($\delta_\xi = \delta_\eta = 0$) によってはゼロエネルギーモードを生じ、解の得られない場合があるが、本研究の要素では、ゼロエネルギーモードを生じることがない。

参考文献

- 1) B.C.Koh and N.Kikuchi : New improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity, *Comput.Methods Appl.Mech.Eng.*, **65**, pp.1-46, 1987.
- 2) W.K.Liu, Y.-K.Hu and T.Belytschko : Multiple quadrature underintegrated finite elements, *Int.j.numer.methods eng.*, Vol.37, pp.3263-3289, 1994.