土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I－A 98

立体充実要素の接線剛性方程式の定式化

佐賀大学大学院博士前期課程　学生員　梶木　健司
理工学部建設工学科　正会員　後藤　茂男
理工学部建設工学科　正会員　井嶋　克志
理工学部建設工学科　正会員　帯屋　洋之

1.まえがき

３次元問題を解析するために、多くの立体要素が提案されている。これらの立体要素は、有限個の４面体要素と８節点要素によって近似することができるが、８節点要素は数個の４面体要素によって構成されている。本論文は、弾性体要素を解析するため、８節点要素さらには多面体要素へと拡張できる定ひずみ弾性体４面体要素の接線剛性方程式の定式化を試みたものである。

2.接線剛性法の概念

接線剛性法より形状解析を行う際の接線剛性方程式の一般式は以下のように表される。

$$\delta \boldsymbol{U} = (\delta \boldsymbol{S\alpha} + \boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_G)\delta \boldsymbol{u} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (1)$$

$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\alpha}$,はそれぞれ節点力ベクトル、節点変位ベクトル、要素力ベクトル、要素力を要素端節点力へと変換する要素座標系の共通座標系に関する方向余弦ベクトルを表している。ここでは、材料剛性に起因する要素剛性$\boldsymbol{K}_0$と要素変形―剛体変位間の適合条件の変化に起因する接線幾何剛性$\boldsymbol{K}_G$が完全に分離された形となっている。

3.要素力式の誘導

要素に図-1のような静定な支点条件を与えた場合、要素内の任意点のｕ，ｖ，w方向の変位と要素変形の関係は、要素の寸法変化を⊿ａとして

$$⊿\mathrm{u} = \mathrm{B}⊿\mathrm{a} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

これを用いて、３次元連続体におけるひずみと変位の適合条件式を表現すると、　$\varepsilon = \mathrm{C}⊿\mathrm{a} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (3)$

となる。また３次元等方弾性体における応力-ひずみ関係は、

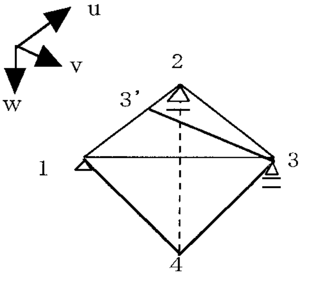
$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon \quad \cdot\cdot\cdot \quad (4)$$

要素全体にわたる、全ひずみエネルギーは次式で表される。

$$\mathrm{U} = 1/2\int \sigma^{\mathrm{T}} \varepsilon\, dV = 1/2\int \varepsilon^{\mathrm{T}} \mathrm{E}\varepsilon\, dV \quad \cdot\cdot\cdot \quad (5)$$

仮定する要素は、定ひずみ等方性均質材料より成るものとすれば、式(4)は次のように書き換えることができる。

$$\mathrm{U} = (1/12)\mathrm{abg}⊿\mathrm{a}^{\mathrm{T}}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\,\mathrm{C}⊿\mathrm{a} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (6)$$



1-全固定　2-ｕ方向のみ可動
3-wのみ固定　4-全可動
1(0,0,0) 2(b,0,0) 3(c,a,0) 3'(c,0,0) 4(e,f,g)

図-1　４面体要素と要素座標系

よって、要素の寸法変化⊿ａに対応する要素力Ａは次式で表され、これが図-1の要素座標系内に設定された静定な支点条件に対応する要素力剛性方程式となる。

$$\mathrm{A} = \partial \mathrm{U}/\partial⊿\mathrm{a} = (1/12)\mathrm{abg}\,\mathrm{C}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\,\mathrm{C}⊿\mathrm{a} = \kappa⊿\mathrm{a} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (7)$$

要素の各辺長をL_n（n=1～6）とおき、微少変位としての⊿ａと辺長変化量⊿Ｌとの関係は、

$$\Delta a=\xi \Delta L \quad \cdot\cdot\cdot (8)$$

とおくことができる。

また、各辺の辺軸力は、次のようになる。

$$N=\xi^{T} A \quad \cdot\cdot\cdot (9)$$

よって、定ひずみ等方弾性体充実４面体要素を辺軸力による立体トラス骨組に置き換えた場合の要素力剛性マトリックスは、式(6),(7),(8)より、

$$k=\xi^{T} \kappa \xi \quad \cdot\cdot\cdot (10)$$

と表すことができる。

4.接線幾何剛性

４面体要素の辺張力N_i（ｉ=1～6）による接線幾何剛性マトリックスは、各辺を軸方向力部材と考えたときのトラスブロックの接線幾何剛性マトリックスと全く同一となる。

辺ｉの共通座標系に対する方向余弦を$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$とすれば、軸方向力部材接線幾何剛性マトリックスと、これを用いた４面体要素の接線剛性方程式がそれぞれつぎのように表される。

$$k_i = N_i / L_i \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1-\beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1-\gamma^2 \end{bmatrix}_i \quad \cdot\cdot\cdot (11)$$

$$\begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \\ \delta U_4 \end{bmatrix} = \left(K_0 + \begin{bmatrix} k_2+k_3+k_4 & -k_3 & -k_2 & -k_4 \\ -k_3 & k_1+k_3+k_5 & -k_1 & -k_5 \\ -k_2 & -k_1 & k_1+k_2+k_6 & -k_6 \\ -k_4 & -k_5 & -k_6 & k_4+k_5+k_6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \delta u_3 \\ \delta u_4 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot (12)$$

5.8節点６面体要素への変換

さらに、実構造への適用を考慮した場合の５個の４面体要素からなる８節点要素の接線幾何剛性は、図-2のような二通りの分割パターンによる６面体ブロックとして、

$$K_6 = 1/2 \quad (K_{61}+K_{62}) \quad \cdot\cdot\cdot (13)$$

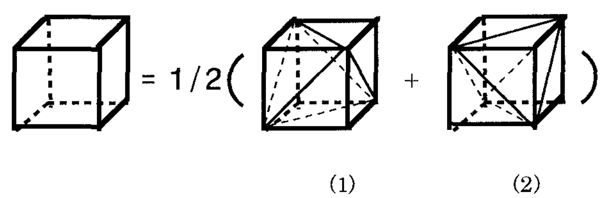


図-2　８節点６面体の分割パターン

と表される。ここで、K_{61}、K_{62}はそれぞれ図-2の８節点６面体要素の剛性マトリックスである。

6.まとめ

接線剛性法による立体充実構造解析のための接線剛性方程式の定式化を行った。この手法によれば、要素挙動に起因する要素剛性から完全に分離された接線幾何剛性は、同じ節点数の立体ブロックには共通に用いることができるため、要素式の確立ができれば、弾性体のみならず弾塑性体や地滑り問題の解析など様々な適用が考えられる。