土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

I-A 80

幾何学的非線形解析における平衡マトリックスの変化の影響

熊本大学　学生員　○橋本　淳也
熊本工業大学　正　員　三池　亮次
熊本大学　正　員　小林　一郎
同　上　学生員　東　高徳

1 はじめに

幾何学的非線形問題とは、構造物に大きな変位と変形を伴う荷重と変位の関係が非線形のことで、骨組構造物の場合には、骨組の幾何学的形状を決める接続マトリックスや平衡マトリックスが幾何学的非線形性に大きく依存する。接続マトリックス $\mathbf{C}$ とは荷重 $\mathbf{p}$ と部材内力 $\mathbf{p}_m$ の関係を与える係数マトリックスであり、平衡マトリックス $\mathbf{H}$ とは一つの部材の、部材両端内力の関係を規定するマトリックスである。ここでは、この幾何学的条件を与える平衡マトリックスの幾何学的非線形解析における効果について検討する。

2 有限変位解析

有限変位仮想仕事の定理に基づいて、変形の中間状態からの剛結骨組構造の有限変位解析の増分形基礎式は、

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} + \mathbf{b} \tag{1}$$

のように与えられる。ここに、$\Delta\mathbf{p}$ と $\Delta\mathbf{d}$ は変形の中間状態から荷重と変位の増分で、添字プライムを中間状態における値とすると

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})^T \\ \mathbf{b} &= \Delta\mathbf{C}\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{F}_m\mathbf{p}'_m - (\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})\mathbf{K}_m\Delta\mathbf{e}_\theta\end{aligned} \tag{2}$$

である。$(\mathbf{C}' + \Delta\mathbf{C})$ は変形後の接続マトリックス、$\mathbf{K}_m = \mathbf{F}_m^{-1}$, $\mathbf{F}_m = diag\{\mathbf{F}_{m,I}\}$, $\mathbf{p}'_m = \{\mathbf{p}'_{m,I}\}$ で添字 I は第 I 部材における値を示す。$\mathbf{p}'_{m,I}$ は第 I 部材にの終端における部材端力ベクトルで、$\mathbf{p}'_m$ は $\mathbf{p}'_{m,I}$ のブロック列ベクトルである。$\Delta\mathbf{e}_\theta = \{\Delta\mathbf{e}_{\theta,I}\}$ は有限変位に伴うひずみの補正ベクトルで軸力に対応する部材廻転$\Delta\theta_I$ に伴うひずみの補正項は $1 - \cos\Delta\theta_I$ である。

図－１に示すような曲線部材において部材の始端から部材軸に沿って ξ の距離の点 P と終端 j の分割部材 (P, j) の平衡マトリックスを $\mathbf{H}_{\xi j}$ とし、部材剛性 EA, EI （E は弾性係数、A は部材断面積、I は断面二次モーメント）の逆数を対角要素とする対角マトリックスを $\mathbf{F}_e$ とするとき

$$\mathbf{F}_{m,I} = \int_L \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\mathbf{H}_{\xi j}d\xi' \tag{3}$$

$$\Delta\mathbf{F}_m = \int_L \mathbf{H}_{\xi j}^T\mathbf{F}_e\left(\mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j}\right)d\xi' \tag{4}$$

である。積分は部材長 L の全体にわたって行われる。式(2)の $\mathbf{b}$ を与える右辺第二項は $\Delta\mathbf{F}_m$ の関数であるがこの $\Delta\mathbf{F}_m$ は、式(4)に従って平衡マトリックス $\mathbf{H}_{\xi j}$ の中間状態からの増分$\Delta\mathbf{H}_{\xi j} = \mathbf{H}_{\xi j} - \mathbf{H}'_{\xi j}$ の関数である。この $\Delta\mathbf{F}_m$ の有限変位解析における効果について検討した。

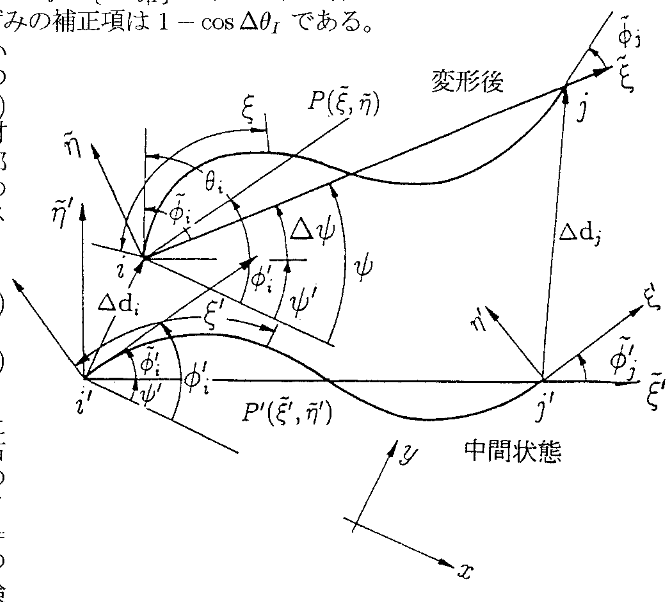


図１、骨組構造の第Ｉ曲線部材の変形

図－２は、一端固定一端自由の柱のエラスティカ曲線で、一つの柱を４分割した解析では式(2)の $\Delta\mathbf{F}_m$ に関する値の影響は大きく表れていない。しかしながら、一つの柱を２分割する場合の座屈点近傍では $\Delta\mathbf{F}_m$ の効果が明瞭に現れている。

3 幾何剛性マトリックス

変形の中間状態において、式(1)を変位増分 $\Delta\mathbf{d}$ で微分し、中間状態における条件を与えることによって、中間状態における接線剛性マトリックス $\mathbf{K}'_T$ を求めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \delta\Delta\mathbf{p} &= (\mathbf{K}'_E + \mathbf{K}'_G)\delta\Delta\mathbf{d} \\ &\equiv \mathbf{K}'_T\delta\Delta\mathbf{d} \end{aligned} \tag{5}$$

ここに、$\mathbf{K}'_E$ と $\mathbf{K}'_G$ はそれぞれ弾性及び幾何剛性マトリックスで

$$\mathbf{K}'_E = \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\mathbf{C}'^T \tag{6}$$

$$\mathbf{K}'_G = \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0 \mathbf{p}'_m - \mathbf{C}'\mathbf{K}_m\left[\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]_0 \mathbf{p}'_m \tag{7}$$

である。ここに、

●解析諸量

ヤング率 $2.1\times10^6(kgf/cm^2)$

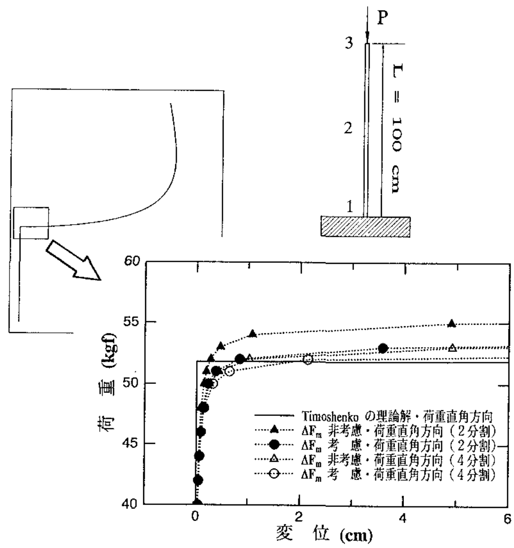
断面積 $1.0(cm^2)$

断面二次モーメント $0.1(cm^4)$

●解析条件

収束判定係数（荷重） 1/1000

収束判定係数（変位） 1/1000



図－２ 解析モデルと荷重変位曲線

$$\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right] = \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_1} \quad \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_n}\right] \tag{8}$$

は立体マトリックスであり、また

$$\left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta\mathbf{d}}\right]\mathbf{p}'_m = \left[\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_1}\mathbf{p}'_m \quad \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_2}\mathbf{p}'_m \quad \cdots \quad \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\Delta d_n}\mathbf{p}'_m\right] \tag{9}$$

添字０は中間状態における値を意味する。$[\partial\Delta\mathbf{F}_m/\partial\Delta\mathbf{d}]$ もまた、立体マトリックスである。軸力しか作用しないトラス構造では、$\Delta\mathbf{H}_{\xi j} = \mathbf{0}$ であるから、幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$ は平衡マトリックスの変化 $\Delta\mathbf{H}_{\xi j}$ は影響しない。しかしながら、軸力以外に曲げモーメントやせん断力の作用する剛結骨組構造では、この $\Delta\mathbf{H}_{\xi j}$ は無視できない。

$$\left(\frac{\partial\Delta\mathbf{F}_m}{\partial\Delta d_i}\right)_0 = \left\{\int_\ell \mathbf{H}^T_{\xi j}\mathbf{F}_e\frac{\partial\Delta\mathbf{H}_{\xi j}}{\partial\Delta\mathbf{d}_i}d\xi'\right\}_0$$

となるから、結局、剛結骨組構造の幾何剛性マトリックス $\mathbf{K}'_G$ には、平衡マトリックスの増分の変位による微分を考慮する必要がある。その幾何剛性マトリックスを用いて曲線部材を含む剛結骨組構造のいくつかの解析を試みる。

参考文献

1) Miike,R.,Kobayashi,I.,Yamada,Z.:"Virtual Large Displacement Theorem for Frame Structures" ASCE, 1990
2) 三樹祐太、三池亮次、小林一郎、橋本淳也:"形状マトリックスを用いた曲線部材骨組の幾何剛性マトリックス"土木学会西部支部講演発表会,1996年３月
3) 荒巻栄輔、三池亮次、小林一郎、橋本淳也:"剛結骨組構造の非線形座屈解析" 土木学会西部支部講演発表会,1996年３月