土木学会第51回年次学術講演会（平成８年９月）

Ⅰ-A 79　面内回転自由度を考慮したシェル問題の変分原理

群馬工業高等専門学校　正会員　末　武　義　崇
東京電機大学　正会員　井　浦　雅　司
ジョージア工科大学　S. N. Atluri

１．はじめに

有限変位・有限ひずみの仮定に基づく板・シェルの大変形解析の場合、より正確にしかも比較的簡明な形の理論を構築するためには、変形の自由度として変位だけでなく回転の自由度をも考慮して定式化する[1]ことが必要である。その際、面内の回転自由度をいかにして合理的かつ自然な形で導入しうるかが重要な課題となるわけだが、本研究では、この点に関する理論的な検討を試みた。

２．基底ベクトルと釣り合い条件式

変形前のシェル基準面S_0に垂直な線素に関する幾何学的仮定として、直線性の保持のみを採用する。すなわち、法線性の保持や長さの不変性については必ずしも仮定しない。このとき、埋め込み座標系$\xi^i\ (i=1,2,3)$を用いれば、シェル内部の点における変形前後の基底ベクトル$\mathbf{G}_i$および$\mathbf{g}_i$は、

$$\mathbf{G}_\alpha=\mathbf{A}_\alpha+\xi^3\mathbf{A}_{3,\alpha}\ ,\quad \mathbf{G}_3=\mathbf{A}_3 \qquad (1)$$

$$\mathbf{g}_\alpha=\mathbf{a}_\alpha+\xi^3\mathbf{a}_{3,\alpha}\ ,\quad \mathbf{g}_3=\mathbf{a}_3 \qquad (2)$$

ここに、$\mathbf{A}_i$および$\mathbf{a}_i$は、変形前後の基準面上の基底ベクトルである。式(1)・(2)で与えられる基底を用い、シェル内微小部分の局所的な運動量の平衡条件を適用すれば、応力の釣り合い条件式および静的な角運動量の平衡条件式として次式が得られる。式中、$\sqrt{A}\equiv\mathbf{A}_3.\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2$と置けば、

$$(\sqrt{A}\mathbf{N}^\alpha)_{,\alpha}+\sqrt{A}\overline{\mathbf{p}}=\mathbf{0}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{A}}(\sqrt{A}\mathbf{H}^\alpha)_{,\alpha}-\mathbf{N}^3+\overline{\mathbf{m}}=\mathbf{0} \qquad (3),(4)$$

$$\mathbf{a}_\alpha\times\mathbf{N}^\alpha+\mathbf{a}_{3,\alpha}\times\mathbf{H}^\alpha+\mathbf{a}_3\times\{\frac{1}{\sqrt{A}}(\sqrt{A}\mathbf{H}^\alpha)_{,\alpha}+\overline{\mathbf{m}}\}=\mathbf{0} \qquad (5)$$

ここに、$\mathbf{N}^i$および$\mathbf{H}^\alpha$は、第１種 Piola-Kirchhoff の応力テンソル$\mathbf{t}$により次式で定義される。

$$\mathbf{N}^i\equiv\int_{\xi^3}\mathbf{G}^i.\mathbf{t}\mu_0 d\xi^3\ ,\quad \mathbf{H}^\alpha\equiv\int_{\xi^3}\xi^3\mathbf{G}^\alpha.\mathbf{t}\mu_0 d\xi^3 \qquad (6),(7)$$

また、$\overline{\mathbf{p}}$および$\overline{\mathbf{m}}$は荷重を基準面S_0に集中化した量、μ_0はS_0の曲率から計算されるパラメータである。

３．剛体回転とひずみ測度

有限の剛体回転テンソル$\mathbf{R}$を用いて、次式で定義される中間的な基底ベクトル$\hat{\mathbf{g}}_i$を導入する。

$$\hat{\mathbf{g}}_\alpha\equiv\mathbf{R}^T.\mathbf{g}_\alpha=\hat{\mathbf{a}}_\alpha+\xi^3\hat{\mathbf{n}}_\alpha\ ,\quad \hat{\mathbf{g}}^3\equiv\mathbf{R}^T.\mathbf{a}_3\ ;\quad \hat{\mathbf{a}}_\alpha\equiv\mathbf{R}^T.\mathbf{a}_\alpha\ ,\quad \hat{\mathbf{n}}_\alpha\equiv\mathbf{R}^T.\mathbf{a}_{3,\alpha} \qquad (8)$$

一方、中間基底$\hat{\mathbf{g}}_i$と変形前の基底$\mathbf{A}_i$とを関係づける２つの非対称なひずみテンソル$\hat{\mathbf{C}}$、$\hat{\mathbf{b}}^*$を次式で定義する。

$$\hat{\mathbf{a}}_i=\hat{\mathbf{C}}^T.\mathbf{A}_i\ ,\quad \hat{\mathbf{a}}_3=\hat{\mathbf{C}}^T.\mathbf{A}_3=n\mathbf{A}_3\ ,\quad \hat{\mathbf{n}}_\alpha=\hat{\mathbf{b}}^{*T}.\mathbf{A}_\alpha \qquad (9),(10),(11)$$

ここに、nはシェルの座標ξ^3に沿った平均的な厚さ変化を表すパラメータであり、$n=|\mathbf{a}_3|$である。このように$\hat{\mathbf{C}}$を定義すれば$\mathbf{a}_3=\mathbf{R}.\hat{\mathbf{a}}_3=n\mathbf{R}.\mathbf{A}_3$となるから、結果として$\mathbf{R}$を、変形前の法線$\mathbf{A}_3$の方向を変形後の基底$\mathbf{a}_3$の方向に一致させるような剛体回転に限定できる。

次に、変形勾配$\mathbf{F}^T\equiv\mathbf{G}^i\otimes\mathbf{g}_i$と第１種 Piola-Kirchhoff の応力$\mathbf{t}$とがエネルギー的に共役であることを考慮し、応力の仕事率を計算すると次式が得られる。

$$\int_{V_0}\mathbf{t}:\dot{\mathbf{F}}^T dV=\int_{S_0}\{\mathbf{N}:\dot{\hat{\mathbf{C}}}+\mathbf{H}:\dot{\hat{\mathbf{b}}}^*+\mathbf{W}.\underline{(\mathbf{a}_i\times\mathbf{N}^i+\mathbf{a}_{3,\alpha}\times\mathbf{H}^\alpha)}\}\sqrt{A}d\xi^1 d\xi^2 \qquad (12)$$

ここに、$\mathbf{N}\equiv\mathbf{A}_i\otimes\mathbf{N}^i.\mathbf{R}$、$\mathbf{H}\equiv\mathbf{A}_\alpha\otimes\mathbf{H}^\alpha.\mathbf{R}$と置き、$\dot{\mathbf{R}}.\mathbf{R}^T$は軸性ベクトル$\mathbf{W}$と単位テンソル$\mathbf{I}$とを用いて

$\dot{\mathbf{R}}.\mathbf{R}^T \equiv \mathbf{W}\times\mathbf{I}$と書けることを考慮した。式(4)・(5)によって、式(12)の下線部はゼロとなるから、合応力テンソル$\mathbf{N}$および$\mathbf{H}$は、それぞれひずみテンソル$\hat{\mathbf{C}}$および$\hat{\mathbf{b}}^*$と共役となる。従って、超弾性体の場合ひずみエネルギー密度$W_0(\hat{\mathbf{C}},\hat{\mathbf{b}}^*)$が存在し、次式のように書くことができる。

$$\partial W_0 \big/ \partial\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{N}, \quad \partial W_0 \big/ \partial\hat{\mathbf{b}}^* = \mathbf{H} \qquad (13),(14)$$

4．変分原理

停留ポテンシャルエネルギーの原理を表す汎関数として、次式を導入する。

$$F_1(\mathbf{u}_0,\mathbf{R},n) = \int_{S_0}\{W_0(\hat{\mathbf{C}},\hat{\mathbf{b}}^*) - \overline{\mathbf{p}}.\mathbf{u}_0 - \overline{\mathbf{m}}.(\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3)\}\sqrt{A}d\xi^1 d\xi^2 - \int_{C^*_{\sigma 0}}\{\overline{\mathbf{N}}.\mathbf{u}_0 + \overline{\mathbf{H}}.(\mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3)\}\sqrt{A}ds \qquad (15)$$

付帯条件は、

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^\alpha \otimes (\mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}_0,_\alpha).\mathbf{R} + n\mathbf{A}_3\mathbf{A}_3 \qquad (16)$$

$$\hat{\mathbf{b}}^* = \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{a}_3,_\alpha.\mathbf{R}\,; \quad \mathbf{a}_3 = n\mathbf{R}^T.\mathbf{A}_3 \qquad (17)$$

である。ここに、$\mathbf{u}_0$はシェル基準面の変位ベクトル、$\overline{\mathbf{N}}$および$\overline{\mathbf{H}}$はシェル境界上に作用する荷重ベクトルである。式(15)で与えられる汎関数の停留条件$\delta F_1 = 0$により、Euler-Lagrange 方程式として式(3)〜(5)で表される釣り合い条件式、および力学的境界条件式が得られる。

変位のみを未知量とした通常の変分原理の場合、角運動量の平衡条件に対応する式(5)を、 Euler-Lagrange 方程式の１つとして誘導することはできない。一方、変位に加えて回転の自由度をも考慮すれば、変分原理からより自然な形で角運動量の平衡条件を誘導することができる。回転自由度を考慮する際には、例えば、変形勾配$\mathbf{F}$を右ストレッチテンソルと回転テンソルとに極分解する形で回転を考慮するのが一般的である。しかしながら、その場合、ひずみ測度としての右ストレッチテンソルが対称であるため、シェル面内の回転自由度を変位－ひずみ関係式の中に取り入れることができない。この点については、本研究のように非対称なひずみ測度を定義することによって解決することができる。次節では、面内の回転自由度が変位－ひずみ関係式の中に導入される過程を、簡単な例を用いて示すことにする。

5．面内回転自由度

二次元問題に限定し、座標系として Descartes 系を用いて考える。線形化された回転テンソル$\mathbf{R}$は Kronecker のδ、交代記号$e_{\alpha\beta}$および面内回転角θを用いて、$\mathbf{R} = (\delta_{\alpha\beta} - \theta e_{\alpha\beta})\mathbf{A}_\alpha\mathbf{A}_\beta$と成分表示できるから、$\hat{\mathbf{C}} \equiv \hat{C}_{\alpha\beta}\mathbf{A}_\alpha\mathbf{A}_\beta$と書けば次式が得られる。

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{u}_0,_\alpha = \mathbf{R}.\hat{\mathbf{C}}^T.\mathbf{A}_\alpha \quad \rightarrow \quad \delta_{\beta\alpha} + u_\beta,_\alpha = \hat{C}_{\gamma\alpha}(\delta_{\beta\gamma} - \theta e_{\beta\gamma}) \qquad (18)$$

式(18)を各成分毎に解き、高次項を無視すれば、

$$\hat{C}_{11} \approx 1 + u_1,_1\,, \quad \hat{C}_{22} \approx 1 + u_2,_2\,, \quad \hat{C}_{12} \approx u_1,_2 + \underline{\theta}, \quad \hat{C}_{21} \approx u_2,_1 - \underline{\theta} \qquad (19)$$

従って、変位－ひずみ関係式の中に、下線部のような面内回転自由度を残すことができる。

6．まとめ

剛体回転によって得られる中間的な基底の導入と非対称なひずみ測度の定義とによって、角運動量の平衡条件を Euler-Lagrange 方程式の１つとして表現しつつ、面内の回転自由度を容易に考慮しうることが明らかとなった。今後は、有限要素定式化における接線剛性行列の誘導に際して必要となる、第１変分の線形化[2), 3)]について検討を行っていく。

参考文献： 1) Atluri, S. N., Computers & Structures, **18**, pp.93〜116, 1984. 2) Cazzani, A. and Atluri, S. N., Computational Mechanics, **11**, pp.229〜251, 1992. 3) Hughes, T. J. R. and Brezzi, F., Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **72**, pp.105〜121, 1989.