

I-A 70 直線はり要素の2次弾性理論としての一離散化展開

法政大学工学部 正会員 阿井 正博 ・ 〃 学生員 田村 健太郎
 埼玉大学大学院政策科学研究科 正会員 西野 文雄

1. はじめに -. よく知られている軸力幾何剛性の関係[1]は、軸力状態で線形化された離散化であり、はり-柱理論とは必要十分には対応しない。弾性2次理論としての離散化には、はり-柱理論の常微分基礎式解を用いるもの[例えば3, 5]と、変位補間のもとでの弱形式展開によるもの[例えば2]があるが、これまで後者では、接線剛性が対称にならないなど、整合性の意味で必ずしも十分ではない。ここでは、平面はり要素の弾性2次理論として整合性を保持した一有限要素展開を示す。

2. 運動場 -. Bernoulli-Euler の仮定のもとでの弾性2次理論であるはり-柱理論では、その運動場は微小変位理論と同形の

$$u(x, y) = u_G(x) - y \frac{dv_G}{dx}, \quad v(x, y) = v_G(x) \quad (1)$$

となるが、生じる軸方向直ひずみは

$$e_{xx}(x, y) = \frac{du_G}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_G}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2 v_G}{dx^2} \quad (2)$$

と表される。ここに、 $\{u_G(x), v_G(x)\}$ は断面重心線の軸方向、たわみ方向変位であり、 $\{x, y\}$ は重心線、断面方向の物体固定座標を表す。要素の節点変位

$$\{u\}_{(e)} = \{(u, v, \theta)_i, (u, v, \theta)_j\} \quad (3)$$

に対して、たわみ変位は、微小変位理論での斉次解を用いて

$$v_G(\xi) = \langle \Phi_v \rangle \left\{ (v, \theta)_i, (v, \theta)_j \right\} \\
\langle \Phi_v \rangle = \left\langle 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), 3\xi^2 - 2\xi^3, l(-\xi^2 + \xi^3) \right\rangle \quad (4)$$

と線形補間するとき ($\xi = x/l$: 基準座標, l : 初期長さ)、このたわみによって軸線の伸びひずみ e_{Gxx} が生じないとすれば、幾何学的な非線形効果として、軸方向の変位

$$u_G^*(\xi) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{dv_G}{dx} \right)^2 dx = -\frac{1}{2l} \int_0^\xi \left(\frac{dv_G}{d\xi} \right)^2 d\xi \quad (5)$$

が生じることになる。全長 $[0, 1]$ 区間での縮み量は、式(4)を代入して積分することにより

$$\Delta = \frac{1}{2} \langle (v, \theta)_i, (v, \theta)_j \rangle [A] \left\{ \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}_i, \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}_j \right\}, \quad \text{ただし} \quad [A] = \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -l \\ & & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \text{Sym.} & & & \frac{2l}{15} \end{bmatrix} \quad (6)$$

として得られる。ここで、逆に、スパン長を l に保持して曲げ変位させれば、前述の縮み Δ の分だけ、軸方向に一樣な伸び変位 $\xi\Delta$ が生じて適合条件が満たされることになる(図-1)。これに、両端節点の変位 $\{u_i, u_j\}$ による伸び変位を考慮すれば、はりの軸方向変位とその重心線伸びひずみは

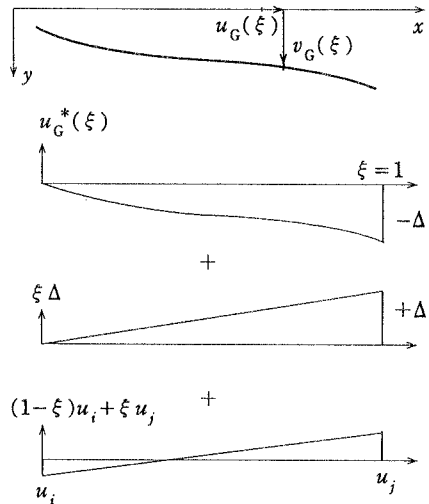


図-1 軸方向変位の分解

$$u_G(\xi) = \langle 1 - \xi, \xi \rangle \left\{ \begin{matrix} u_i \\ u_j \end{matrix} \right\} + u_G^*(\xi) + \xi \Delta \quad (7)$$

$$e_{Gxx} = \frac{1}{l} \{ u_j - u_i + \Delta \} : \text{const.} \quad (8)$$

と表され、 e_{Gxx} は長手方向に一定となる。

3. 剛性関係 - はり要素の両端に $\{x, y\}$ -方向の力とモーメント $\{F_x, F_y, M\}$ が作用したときの全ポテンシャル・エネルギー

$$W = \int_0^l \left[\frac{M^2}{2EI} + \frac{N^2}{2EA} \right] dx - \{F_x u_G + F_y v_G + M\theta\}|_{x=0} - \{F_x u_G + F_y v_G + M\theta\}|_{x=l} \quad (9)$$

の停留条件より得られる節点力-節点変位関係は、以下ようになる：

$$-F_{xi} = F_{xj} = N, \quad \left\{ \begin{pmatrix} F_y \\ M \end{pmatrix}_i \right\} = ([k_0] + N[\bar{k}_G]) \left\{ \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}_i \right\} \quad (10)$$

ただし、引張軸力 N と初期曲げ剛性 $[k_0]$ は

$$N = \frac{EA}{l} \{ u_j - u_i + \Delta \}, \quad [k_0] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{Sym.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

のように表され、単位引張軸力に対する曲げ幾何剛性 $[\bar{k}_G]$ は、式(6)のマトリックス $[A]$ に等しい。さらに、前式を節点変位で微分して得られる接線剛性は

$$\begin{aligned} -\delta F_{xi} = \delta F_{xj} &= \frac{EA}{l} (\delta u_j - \delta u_i) + \frac{EA}{l} \langle \psi^*(v, \theta) \rangle \left\{ \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta \theta \end{pmatrix}_i \right\}, \\ \left\{ \begin{pmatrix} \delta F_y \\ \delta M \end{pmatrix}_i \right\} &= ([k_0] + N[\bar{k}_G] + \frac{EA}{l} [\langle \psi^*(v, \theta) \rangle \langle \psi^*(v, \theta) \rangle]) \left\{ \begin{pmatrix} \delta v \\ \delta \theta \end{pmatrix}_i \right\} \\ &\quad + \frac{EA}{l} \{ \psi^*(v, \theta) \} (\delta u_j - \delta u_i) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、

$$\{ \psi^*(v, \theta) \} = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_v^* \\ \psi_\theta^* \end{pmatrix}_i \right\} = [\bar{k}_G] \left\{ \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}_i \right\} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5l}(v_i - v_j) + \frac{1}{10}(\theta_i + \theta_j) \\ \frac{1}{10}(v_i - v_j) + \frac{l}{30}(4\theta_i - \theta_j) \\ \frac{6}{5l}(v_j - v_i) - \frac{1}{10}(\theta_i + \theta_j) \\ \frac{1}{10}(v_i - v_j) + \frac{l}{30}(4\theta_j - \theta_i) \end{bmatrix} \quad (13)$$

である。逆に、 $\delta U_{(e)} = (F_x \delta u + F_y \delta v + M \delta \theta)_i + (\dots)_j$ を積分して求まる要素のひずみエネルギーは

$$U_{(e)} = \frac{EA}{2l} (u_j - u_i + \Delta)^2 + \frac{1}{2} \langle (v, \theta)_i, (v, \theta)_j \rangle [k_0] \left\{ \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix}_i \right\} \quad (14)$$

となる。以上の剛性関係は、摂動法により有限変位微分基礎式を3次項まで解いた結果[4]に、2次項までの範囲で一致する。

<参考文献> 1) Hartz, *J. Str. Div.*, ASCE, Vol.91, No.ST6, Dec., 1965; 2) 前田・林・中村, 土木学会論文報告集, No.223, 1974-3; 3) 後藤・羽根・田中, 土木学会論文報告集, No.238, 1975-6; 4) 阿井・西野, 土木学会論文報告集, No.304, 1980-12; and 5) Goto and Chen, *J. Str. Eng.*, ASCE, Vol.113, No.7, Jul., 1987.