土木学会第50回年次学術講演会（平成7年9月）

CS-68

ブシネスク方程式によるマッハ反射の有限要素法解析

○ 中央大学　学生員　加藤 証一郎
（株）INA 正　員　高木 利光
中央大学　正　員　川原 睦人

1　はじめに

浅水域における波場の予測は、沿岸利用や災害防止のために非常に重要な課題である。そして、有限振幅波理論に基づく波動解析は、これを予測するのに必要不可欠なものである。そこで、本研究は、非線形分散波として知られる孤立波の相互衝突や、その壁面に対する斜め衝突における挙動の変化について検討することを目的とする。今回の報告では、”マッハ反射”と呼ばれる孤立波の壁面に対する斜め衝突問題を取り上げる。また、本研究では開境界条件処理に対して、人為的に設けた開境界上で内部領域の数値解析解と外部領域の一般解を接続する解析解接続法を導入する。

2　基礎方程式と境界条件

本研究において、非線形分散波を記述する二次元のブシネスク方程式は以下のようである。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y\partial t}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{(h+\eta)u\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(h+\eta)v\}=0 \quad (3)$$

ここに、u,vはx,y方向の流速成分、ηは水位変動量、hは水深、gは重力加速度である。次に、境界条件として、まず流速が与えられる境界条件を考える。非粘性流れの場合には、境界が座標軸に一致しているならばその一方だけを与えることで解決できるが、そうでないならばu, vを座標変換して直角方向の流速u_nを、

$$u_n=ul+vm=\hat{u}_n \qquad on \quad S_1 \quad (4)$$

と規定する。ここに、l,mは境界S_1の法線とx-y軸がなす方向余弦である。また、水位の規定に対しては、

$$\eta=\hat{\eta} \qquad on \quad S_2 \quad (5)$$

である。ここに、$\hat{\eta}$は境界S_2上で与えられた水位である。そして、開境界上では、流速、水位に対する内部領域の数値解析解と外部領域の一般解が一致することから次に示す連続条件を与える。

$$u=\overline{u}\ ,v=\overline{v}\ ,\ \eta=\overline{\eta} \qquad on \quad S_3 \quad (6)$$

ここに、各右辺は一般解を表す。また、初期条件については次のようである。

$$u=\hat{u}_0\ ,v=\hat{v}_0\ ,\ \eta=\hat{\eta}_0 \qquad at \quad t=0 \quad (7)$$

3　外部領域の一般解

ブシネスク方程式は非線形であり、数学的に重ね合わせの原理が成り立たず、一般解を導くのは大変困難である。それゆえに、本研究では、開境界条件処理に際して線形化されたブシネスク方程式の解析解を適用する。今、外部領域における一般解を次のように仮定する。

$$\overline{u}=\tilde{u}exp(-j\omega t)exp\{j(k_x x+k_y y)\} \quad (8)$$

$$\overline{v}=\tilde{v}exp(-j\omega t)exp\{j(k_x x+k_y y)\} \quad (9)$$

$$\overline{\eta}=\tilde{\eta}exp(-j\omega t)exp\{j(k_x x+k_y y)\} \quad (10)$$

ここに、~付きは振幅を表す。また、k_x,k_yはx,y方向の波数成分、ωは角振動数である。そして、開境界で外向き波のみを考慮し、波数成分を三方向と仮定すると一般解は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix}\overline{u}\\ \overline{v}\\ \overline{\eta}\end{bmatrix}=\sum_{n=1}^{3}\overline{\eta}_0^n\begin{bmatrix}\frac{g(k_x^nB^n-k_y^nC^n)}{\{A^nB^n-(C^n)^2\}\omega^n}\\ \frac{g(k_y^nA^n-k_x^nC^n)}{\{A^nB^n-(C^n)^2\}\omega^n}\\ 1\end{bmatrix}exp(-j\omega^n t)exp\{j(k_x^n x+k_y^n y)\} \quad (11)$$

ここに、$A^n=1+\frac{h^2}{3}(k_x^n)^2$, $B^n=1+\frac{h^2}{3}(k_y^n)^2$, $C^n=\frac{h^2}{3}k_x^nk_y^n$である。また、$\omega^n=c\sqrt{\frac{(k_x^n)^2B^n+(k_y^n)^2A^n-2k_x^nk_y^nC^n}{A^nB^n-(C^n)^2}}$, $c=\sqrt{gh}$（波速）で、$\overline{\eta}_0^n$は未定定数である。この未定定数は、開境界S_3における連続条件式(6)を用いることにより決定することができる。また、開境界上の波数kは波の周期とその地点における波速から計算する。

4　有限要素法の適用

流速及び水位に対して、三角形一次の内挿関数を仮定し、基礎方程式(1)-(3)に通常のガレルキン法を適用して有限要素方程式を得る。その際に、各境界積分項に対しては先に求めた解析解を適用する。そして、時間方向への離散化には、運動方程式に対し準陽的オイラー法を、連続方程式に対しては陽的オイラー法を適用する。

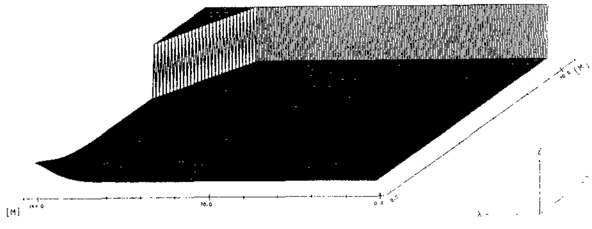
5 数値解析例

マッハ反射の数値シミュレーションを行い、その波動伝播の時刻歴を図－1に示す。ここでは、以下に示す事項を確認することを目的とする。

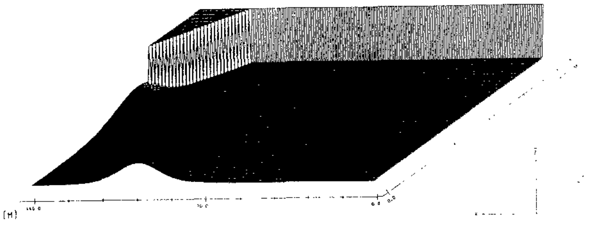
- Stem Wave の出現
- 反射波成分の減衰
- 入射角と反射角の相違

尚、入射波境界において、Laitone によって与えられた一次近似解による孤立波を仮定し、その入射波高は 0.01[m] とする。また、解析領域における水深は 1.0[m] で一定とし、計算条件としてはランピングパラメーター 0.9600 、微小時間増分量 0.0280[sec] を適用する。

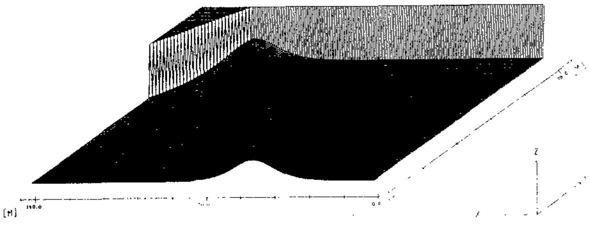
(19.6 秒後)



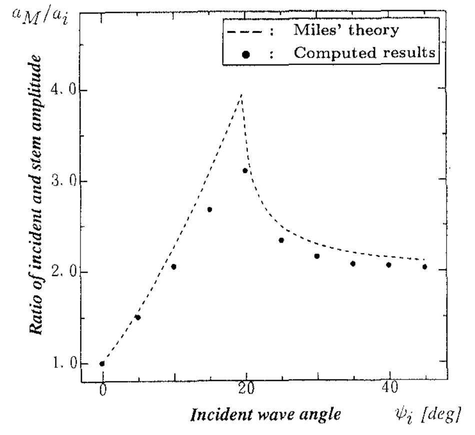
(39.2 秒後)



(58.8 秒後)



次に、本解析の妥当性を確認するために Miles の理論との比較を行う。ここでは、入射角に対する最大遡上高についての比較を行い、図－2に示す。



図－2　a_M/a_i vs.ψ_i

6 おわりに

本報告では、マッハ反射の数値シミュレーションを行い、また、Miles の理論との比較を行った。そして、本解析と Miles の理論との間に定性的な一致を見ることができた。一方、波動伝播解析における開境界条件処理に対して、解析解接続法が有効な手法であることを確認した。しかし、入射波を伴う外向き波の開境界条件処理が課題として残っている。また、非線形性の考慮と波数成分の拡張についても今後検討する。

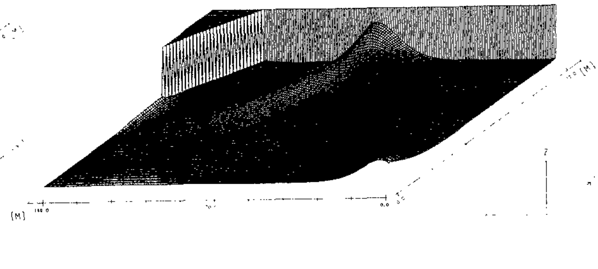
参考文献

[1] 鄭榮裕, 川原睦人："Boussinesq 方程式の有限要素解析に関する研究", 修士論文, 中央大学,(1993).

[2] 児玉敏雄："浅水長波方程式の有限要素解析とその応用に関する研究", 博士論文, 中央大学,(1992).

[3] 川原睦人：有限要素法流体解析, 日科技連,1985

(78.4 秒後)



図－1　マッハ反射の解析例