土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

CS-61　ラプラス変換ーガレルキン有限要素法による浸透流解析

佐藤工業　正　員　児玉敏雄
中央大学　正　員　川原睦人

1. はじめに

透水係数のオーダーが異なる地層構造を持つ地盤や亀裂性岩盤等において，地下水による物質移動の問題を解析する場合，計算に用いる微小時間増分の大きさは，透水係数の大きな地層や亀裂の中の水の流速に支配される．この場合，数値的安定性を確保するため時間増分は小さくとる必要があるが，解析領域全体としては低透水層内の挙動もみる必要があるので計算対象時間は長くなる．Sudicky[1] はこの問題点を回避するため，ラプラス変換とガレルキン法を用いた効率的な計算手法を移流拡散方程式に適用している．基礎方程式にラプラス変換を行い，周波数空間での解をガレルキン法で求めた後，逆変換を施すことにより時間領域での数値解を求める方法である．本研究では，Sudicky の方法を非定常の浸透流解析に適用し妥当性の検討を行った．ここではその結果について述べる．

2.ラプラス変換ーガレルキン有限要素法

ラプラス変換を施した後の，浸透流の運動方程式および境界条件は次のようになる．

$$p\bar{h} - \bar{h}(t=0) - k\left(\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{h}}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \cdots(1), \quad h = \bar{\hat{h}} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad \cdots(2), \quad \frac{\partial h}{\partial n} = \bar{\hat{q}} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad \cdots(3)$$

ここに，Ω は解析領域を表し，Γ_1, Γ_2 は基本境界および自然境界を表す．h, k, q はそれぞれ，水頭，透水量係数，流量をそれぞれ表し，$\hat{h}$ は既知の境界値，$\bar{h}$ はラプラス変換された変数を意味する．また p はラプラス変換のパラメターである．周波数領域における支配方程式 (1) をガレルキン法を用いて離散化する．得られた方程式をマトリックス方程式で表すと次式のようになる．

$$\left(\begin{bmatrix} E_{uu} & E_{uc} \\ E_{cu} & E_{cc} \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix} S_{uu} & S_{uc} \\ S_{cu} & S_{cc} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \bar{H}_u \\ \bar{H}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{B}_u \\ \bar{B}_c \end{Bmatrix} \qquad \cdots(4)$$

ここで，E, S, H, B はそれぞれ質量，拡散，水頭，境界条件マトリックスの成分を表し，添字 u, c はそれぞれ，内部節点および境界上の節点に関する係数であることを示す．したがって周波数領域における変数は，次式で求めることができる．

$$([E_{uu}] + p[S_{uu}])\{\bar{H}_u\} = \{\bar{B}_u\} - ([E_{uc}] + p[S_{uc}])\{\bar{H}_c\} \qquad \cdots(5)$$

(5) 式を解く際，ラプラス変換のパラメターｐは以下のように設定する．

$$p_k = p_0 + k\pi i / T \quad (k = 1, 2N+1)\cdots(6), \qquad p_0 = -\mathrm{In}(E_R)/2T \quad \cdots(7)$$

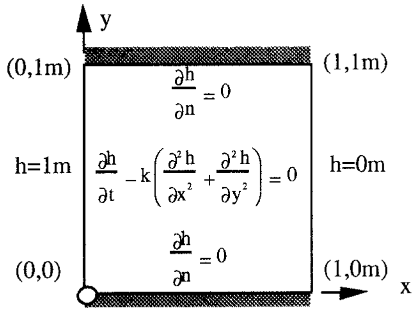
ここで，T は計算対象時間，N は収束に必要な正の整数（通常5～50），E_R は誤差パラメター（通常 10^{-2}～10^{-6}），$i=\sqrt{-1}$ である．次に(5) 式で求めた周波数領域上での変数の値にラプラス逆変換を施し，時間領域に変換する．ここでは，数値ラプラス逆変換を用いる．数値ラプラス逆変換には数々の手法が提案されている．田崎ら[2]は，数値ラプラス逆変換を行う際，変換の複素積分が容易に実行できるように指数関数部を近似する手法[3]を用い，他の手法に比べて汎用的であるとしている．しかしながらこの方法では，ラプラス変換のパラメターの中に時刻 t を含むため，求めたい時刻毎にラプラス変換，逆変換を行う必要がある．ここでは，Sudicky が用いているCrump の方法[4]を逆変換の公式として用いる．この方法は，ラプラス変換に時刻 t を含まず，計算が非常に簡単である．数値ラプラス逆変換は次式で行う．

$$h_j(t) = \frac{1}{T}\exp(p_0 t)\left[\frac{1}{2}\bar{h}_j(p_0) + \sum_{k=1}^{2N+1}\left(\mathrm{Re}\{\bar{h}_j(p_k)\}\cdot\cos(k\pi t/T) - \mathrm{Im}\{\bar{h}_j(p_k)\}\cdot\sin(k\pi t/T)\right)\right] \quad \cdots(8)$$

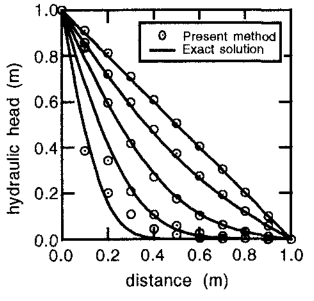
ここで，Re および Im はそれぞれ，複素数から実数部および虚数部をとることを意味する．

３．数値計算例

数値計算例として，図－１に示すような境界条件のもとに非定常解析を実施した．ただし，初期水頭は領域全体で零とし，透水量係数は1.0m^2/secと仮定した．またラプラス変換においては，N=40，E_R=1.0×10^{-2}とした．



図－１解析領域および境界条件



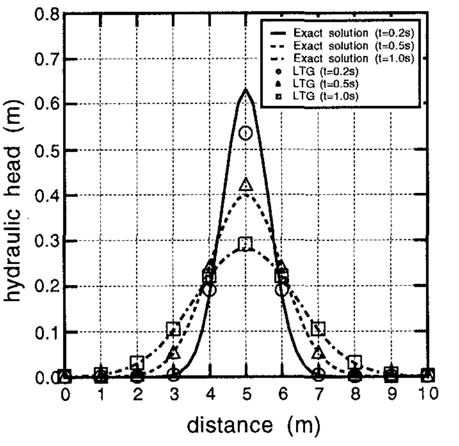
図－２水位の時間変化

この問題の厳密解は，

$$h(x,t)=1-x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\sin[(1-x)n\pi]$$

で与えられる．図－２に各時刻の水位分布を示す．経過時間が零に近い t=0.01, 0.03, 0.07sec. においては，計算値と厳密解との間に差異があるものの，t=0.15sec. 以降においては，計算値は厳密解とよく一致している．この例題により，固定境界条件を持つ非定常問題への妥当性を確認した．

次に初期値問題への適用性を検討する．いま，１次元水路を想定し，中央で水位の初期条件がデルタ関数で与えられた時に，水位が時間とともにどのように変化するかを計算した．



図－３　水位の時間変化

この問題の厳密解は，

$$h(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

で与えられる．図－３に本手法による計算結果を厳密解と比較し示す．前の例題と同様，初期の時刻でピークに若干の差異はみられるが，概ね良好な結果を得た．

４．おわりに

ラプラス変換とガレルキン有限要素法を用いた浸透流の解析手法を示した．数値計算例により，固定境界条件および初期値問題の非定常計算の適用性を確認した．今後透水係数比の大きな地盤を対象とした実際問題に適用していく予定である．

参考文献

1) Sudicky, E.A.: The Laplace Transform Galerkin Technique : A Time-Continuous Finite Element Theory and Application to Mass Transport in Groundwater, Water Resour. Res., 25(8), pp.1833-1846, 1989.
2) 田崎政昭，中山司，川原睦人：ラプラス変換を用いた時間依存問題の境界要素解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，pp.22-27, 1986.
3) 細野敏夫：数値ラプラス変換，電気学会論文誌Ａ，99巻10号，pp.44-50, 1979.
4) Crump, K.S.: Numerical Inversion of Laplace Transforms using a Fourier Series Approximation, J. Assoc. Comput. Mach., 23(1), pp.89-96, 1976.