

CS-52

同次補間を用いた流れ解析における圧力の安定化手法

○中央大学 学員 丸岡 晃
中央大学 正員 川原 睦人

1. はじめに

非圧縮粘性流れの有限要素解析では、混合補間が、従来から用いられている。同次補間を用いた場合、圧力が節点間の振動を生じ、数値的に不安定になることから、この数値的不安定性を回避するために、混合補間が適用される。しかし、近年、Hughes や Tezduyer などによって、同次補間を用いても、圧力振動の安定化を可能とする手法が、開発されてきている [1,2]。また、我々の研究室でも、流速修正法などの分離型解法が、同次補間でも、陽的解析において、安定に解析を行うことが可能であることを示してきた [3]。しかし、分離型解法を用いても、メッシュが不均一の場合や高レイノルズ数流れの場合などで、圧力の振動が発生することがある。本論文では、分離型解法の問題点を回避した圧力の安定化手法を提案し、計算例として、Cavity 流れの解析を行い、その有効性について報告する。

2. 基礎方程式

非圧縮粘性流体の運動方程式と連続式は、次のような Navier-Stokes 方程式によって表される。

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) + p_{,i} - \mu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここで、 u_i は流速、 p は圧力、 ρ は密度、 μ は粘性係数を示す。また、境界条件は、 Γ_1 上で、流速と圧力勾配が与えられ、 Γ_2 上で、流速勾配と圧力が与えられる。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$p_{,i} n_i = \hat{r} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (4)$$

$$(\mu(u_{i,j} + u_{j,i})) n_j = \hat{s}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (5)$$

$$p = \hat{p} \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (6)$$

なお、本論文では、圧力勾配の境界条件をゼロとしている。

3. 離散化手法

式(1)の時間方向の離散化は、陽的オイラー法を適用し、式(1)の圧力項と連続式(2)を陰的に扱うと、式(1),(2)は、以下のように時間方向に離散化される。

$$\rho \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n \right) + p_{,i}^{n+1} - \mu (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} = 0 \quad (7)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (8)$$

ここで、 n は、時間ステップ、 Δt は、微小時間増分を示す。式(7)を中間流速 $\tilde{u}_i$ を定義し、以下のように分割する。

$$\rho \left(\frac{\tilde{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n \right) - \mu (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} = 0 \quad (9)$$

$$\rho \left(\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i}{\Delta t} \right) + p_{,i}^{n+1} = 0 \quad (10)$$

流速修正法では、上式の発散をとり、式(8)を代入した以下の圧力ポアソン方程式により、圧力を求める。

$$\frac{\Delta t}{\rho} p_{,i,i}^{n+1} = \tilde{u}_{i,i} \quad (11)$$

式(9),(10),(11)に同次補間による有限要素法を適用すると、有限要素方程式は、以下ようになる。

$$M_L \left(\frac{\tilde{u}_i - u_i^n}{\Delta t} \right) + N(u_j^n) u_i^n + K_{ij} u_j^n = F_i \quad (12)$$

$$M_L \left(\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i}{\Delta t} \right) + G_i p^{n+1} = 0 \quad (13)$$

$$\Delta t L p^{n+1} = -G_i \tilde{u}_i \quad (14)$$

ここで、 M_L は、集中化質量行列を示す。また、 $N(u_j^n)$ には、流線方向に与える人工粘性の項が含まれる。

ところが、流速修正法では、連続式(8)を直接離散化した以下の式を完全に満たさない。

$$G_i u_i^{n+1} = 0 \quad (15)$$

流速修正法で満たされている連続式は、式(13)の $\tilde{u}_i$ を式(14)に代入することによって、導くことができる。

$$G_i u_i^{n+1} + \Delta t (L + G_i M_L^{-1} G_i) p^{n+1} = 0 \quad (16)$$

上式の第2項は、連続条件を緩和し、圧力を安定化させる効果があるため、流速修正法では、同次補間を用いることが可能になる。しかし、この項は、 Δt が乗されていることから、 Δt が、小さいときに、連続条件が強められ、圧力が不安定になり易い。この不安定現象は、圧力勾配に依存し、圧力勾配が低い場合に、顕著に現れる。

そこで、本論文では、式(16)の Δt のかわりに、 Δt に依存しない時間の次元をもつ行列 T に置き換えることによって、圧力の安定化を図るを試みる。

$$G_i u_i^{n+1} + T (L + G_i M_L^{-1} G_i) p^{n+1} = 0 \quad (17)$$

この T は、対角行列であり、対角項は、要素ごとに定義される以下の値を節点量に分配した値である。

$$w_i = \frac{1}{\rho} p_{,i}, \quad \tau = \alpha \frac{|u_{i,i}|h}{2||w_i||_2} \quad (18)$$

ここで、 h は、要素長を示し、 α は、数値実験的に最適化する無次元量である。いまのところ、 $\alpha = 0.5 \sim 1.0$ 程度がいい

いようである。また、圧力ポアソン方程式は、式(17)に、式(13)を代入することによって得られる。

$$((T - \Delta t I) G_i M_L^{-1} G_i + T L) p^{n+1} = -G_i \tilde{u}_i \quad (19)$$

式(19)の左辺行列は、非対称行列であるため、逆行列を解くことは困難である。そこで、 $(T - \Delta t I) G_i M_L^{-1} G_i p^{n+1}$ の項を陽的に取り扱うことによって、左辺行列を対称化する。はじめに、連続式は以下の形で取り扱う。

$$G_i u_i^{n+1} + T(L + G_i M_L^{-1} G_i) p^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} T G_i (u_i^{n+1} - u_i^n) + \Delta t (L + G_i M_L^{-1} G_i) (p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (20)$$

第3項と第4項は、定常収束時にゼロとなる項であり、第3項は、 $T G_i M_L^{-1} G_i p^{n+1}$ の項を陽的に取り扱える働きをし、第4項は、 $\Delta t G_i M_L^{-1} G_i$ の行列を $\Delta t L$ の行列に置き換える働きをする。上式に、式(13)を代入すると、改良された圧力ポアソン方程式が得られる。

$$(\Delta t I + T) L p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} (\Delta t I + T) G_i \tilde{u}_i + \frac{1}{\Delta t} T G_i u_i^n + \Delta t (L + G_i M_L^{-1} G_i) p^n \quad (21)$$

上式の両辺に $(\Delta t I + T)^{-1}$ を掛けることによって、左辺行列を時間ステップに依存しない対称行列にすることが可能となる。上式を解くことによって、圧力の安定化が図られる。計算手順をまとめると、式(12) → 式(21) → 式(13)のようになる。

3. 計算例

$Re = 10^3, 10^4$ のCavity 流れの解析により流速修正法と本手法を比較し、本手法の有効性を確かめた。有限要素分割は、三角形1次要素に 40×40 の均一のものを用いた。 $Re = 10^3$ では、 $\Delta t = 0.01, 0.001$ の2ケース、 $Re = 10^4$ では、 $\Delta t = 0.01$ の1ケースの解析を行った。また、 $\alpha = 1.0$ としている。流速修正法では、 $Re = 10^3, \Delta t = 0.01$ の場合、圧力振動は発生していないが、 $Re = 10^3, \Delta t = 0.001$ と $Re = 10^4, \Delta t = 0.01$ の場合、圧力振動が領域全体に発生している。それに対し、本手法では、解は Δt に依存せず、3ケースとも、領域全体で安定した解となっている。

4. おわりに

離散化された連続式に、流速修正法と同じ形の圧力の安定化行列を加えることによって、同次補間の有限要素法において、圧力の安定化を試みた。Cavity 流れの解析によって、本手法が、流速修正法と比較し、圧力の安定化に関して優れていることが確かめられた。今後、剥離流れのような、非定常的な流れ場の解析を行い、本手法の有効性を確かめていく予定である。

参考文献

- [1] T.J.R. Hughes, L.P. Franca and M. Balestra, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 59 (1986)
- [2] T.E. Tezduyer, S. Mittal, S.E. Ray and R. Shih, Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 95 (1992)
- [3] M. Hayashi, K. Hatanaka and M. Kawahara, Lagrangian finite element method for free surface Navier-Stokes flow using fractional step methods, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol.13 (1991)

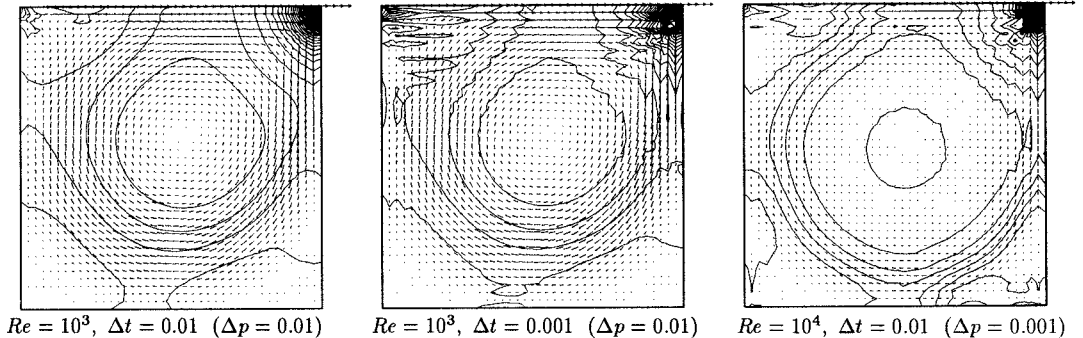


図1 流速修正法による結果

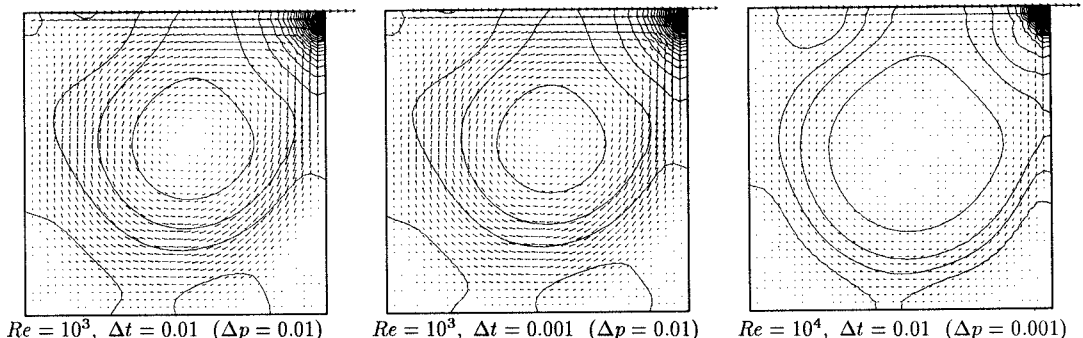


図2 本手法による結果