

CS-34

E 積分の弾塑性有限要素解析に関する研究

徳山高専 正員 橋本堅一
金沢大学 正員 矢富盟祥

1. はじめに

超弾性体ではエネルギー解放率を与える経路独立な E 積分および J 積分は弾塑性解析において、特に材料の弾塑性挙動を比較的うまく表現する増分理論では、エネルギー解放率としての意味は失う。その場合、 J 積分は物理的意味が不明瞭になるが、 E 積分はある状態に達するときに必要とされる外力がなすべき仕事のき裂長さの違いによる差という意味を有するため、塑性材料でも破壊基準としてのパラメータとして有効と考えられる¹⁾。 E 積分の有限要素解析への適用は線形弾性体に対しては有益な結果を得ているが²⁾、弾塑性体へ応用する場合、時間とともに単調に増加するパラメータに関する積分(例えばモデルの変形挙動が単一荷重 P で制御されるなら P に関する積分)を必要とするため線形材料に対する扱いに比べ複雑になる。本研究では E 積分の増分理論を用いた弾塑性解析を行い、同時に J 積分³⁾、Rice の簡便式による評価値⁴⁾、全エネルギー法による評価値⁵⁾の解析を行い、それぞれの弾塑性解析における比較検討を行った。

2. 解析方法と解析モデル

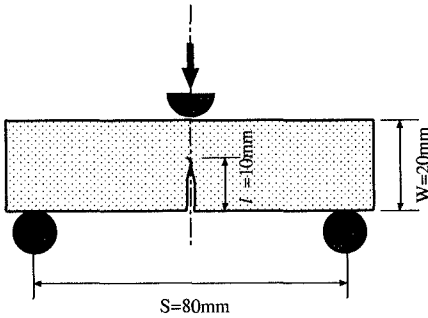


図1 Three point bending specimen with a crack..

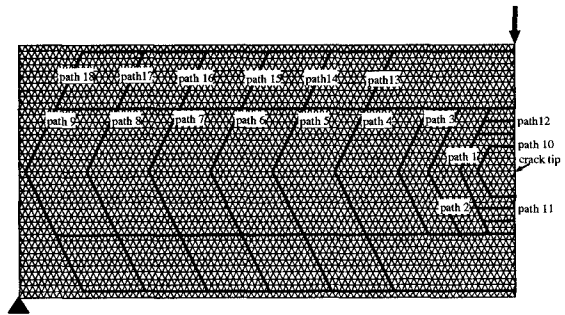


図2 Finite element meshes and the integral paths.

非線形材料に適用可能な E 積分の表示式は積分経路上の表面力ベクトル、および変位ベクトルをそれぞれ s 、 u として

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) d\beta ds \dots\dots\dots (1)$$

で表される⁶⁾。ここで ℓ はき裂長さ、 β は ℓ と独立な時間とともに単調増加するパラメータ(以後荷重とよぶ。)である。本報告では上式のき裂長さに関する微分については2点差分を行い、定ひずみ三角形有限要素解析のための E 積分評価式を

$$E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\{s_{i,j+1}(\ell) - s_{i,j}(\ell)\} \cdot \frac{\{u_{i,j}(\ell + \delta\ell) - u_{i,j}(\ell)\}}{\delta\ell} - \frac{\{s_{i,j}(\ell + \delta\ell) - s_{i,j}(\ell)\}}{\delta\ell} \cdot \{u_{i,j+1}(\ell) - u_{i,j}(\ell)\} \right] ds \quad (2)$$

$$E = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\{s_{i,j+1}(\ell) - s_{i,j}(\ell)\} \cdot \frac{\{u_{i,j+1}(\ell + \delta\ell) - u_{i,j+1}(\ell)\}}{\delta\ell} - \frac{\{s_{i,j+1}(\ell + \delta\ell) - s_{i,j+1}(\ell)\}}{\delta\ell} \cdot \{u_{i,j+1}(\ell) - u_{i,j}(\ell)\} \right] ds \quad (3)$$

とする。ここで、 m は積分経路上の要素辺数、 n は荷重積分点数、 s は各要素辺における表面応力ベクトル、 ds は各要素辺長、 u は各要素辺上における変位ベクトル、そして $\delta\ell$ はき裂進展長さである。また変数 $\ell + \delta\ell$ と ℓ はそれぞれき裂進展後と進展前の物理量を表している。今回は上2式を平均して、いわゆる台形公式に準じた数値積分を行った。

解析モデルはASTMの破壊靱性試験などにみられる3点曲げ供試体モデルで、幅 $W = 20\text{mm}$ 、支点間距離 $S = 80\text{mm}$ 、き裂長さ $\ell = 10\text{mm}$ である (Fig.1 参照)。このモデルの定ひずみ三角形要素分割は Fig.2 (1/2 領域) のようにとった。図中、18本(き裂先端に対して上下、左右対称)の積分経路が記してある。材料の特性値はヤング係数 21000kgf/mm^2 、ポアソン比 0.3 、降伏応力 49kgf/mm^2 、加工硬化率 210kgf/mm^2 としている。要素の降伏はMisesの降伏条件によるものとし、解析に際してはき裂進展後のモデル(以後き裂進展モデルとよぶ。)に着目して、き裂進展モデルの任意の1要素が新たに降伏する時を各荷重積分点とした。すなわち、き裂進展モデルの新たな要素が降伏する荷重を決め、その要素に対して塑性構成式を用いてもう一度解析した。き裂長さの異なる2つのモデルを扱うので1荷重積分点について計4回解析することになる。この解析法は降伏要素が増えるにしたがい、荷重増分が著しく小さくなり、誤差がある段階を越えると蓄積されることになる。ここでは、その誤差があまり大きくならない時点で計算を打ち切った。

3. 解析結果

第1ステップ ($j=1$) における各解析値を弾性解で正規化して経路毎に図示したものが Fig.3 である。ここで J 積分値はほぼ経路独立性を示しているが、 E 積分値はき裂先端近傍の応力勾配の大きい部分の経路に誤差を含んでいる。しかし、そのような部分を除けば E 積分値の方が弾性解に近い値を示し、全エネルギー法とほぼ同じ値を示している。Rice の簡便式による値は、全面降伏状態で有効とされており、この場合、弾性挙動が変形挙動のほとんどを占めるため、弾性解と大きく異なっている。Fig.4 は荷重-荷重点変位図を示している。前述のように荷重点変位が 0.3mm 以上で誤差が大きくなっていると思われるため、0.3mm 程度までを議論の対象とする。荷重点変位が 0.3mm のときの塑性域を Fig.5 に示す。このときの J 積分値と E 積分値を Fig.6 に示す。ここでは荷重点近傍の塑性域を含む経路 (path13~path18) と、含まない経路 (path1~path9) で大きな差を J 積分値、 E 積分値とも示している。このことは、塑性域を新たに横切らない限り同一の値を持つという意味で、 J 積分値も E 積分値も塑性域固有の量であることを意味する。Fig.7, Fig.8 には荷重点近傍の塑性域を含まない経路 (path9) と含む経路の代表的な経路 (path18) について解析値を荷重点変位に対して図示している。両図において経路 9 の J 積分値を除いてはすべての解析値が塑性域が広がるにしたがい Rice の簡便式に近づいていることがわかる。また E 積分値は経路 9 よりも外側の経路 18 の方が全エネルギーの値に近い。以上のことを総合すると、今回は、誤差を回避するため全断面降伏状態まで解析しなかったのが明確に結論は出来ないが、すでに報告にある Rice の簡便式は実際は J 積分ではなく E 積分の簡便式であること¹⁾、 E 積分の経路を物体表面にとれば全エネルギー法と等価であることが推察可能な結果であると判断できる。

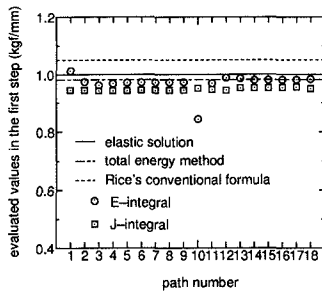


図3 Normalized computed values.

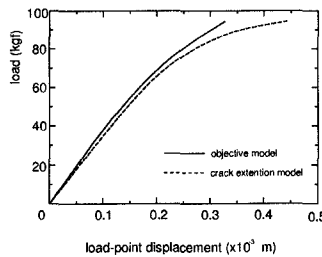


図4 Relationship between a load and a load-point displacement.

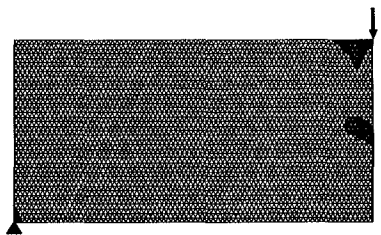


図5 Plastic regions for a 0.3mm load-point displacement.

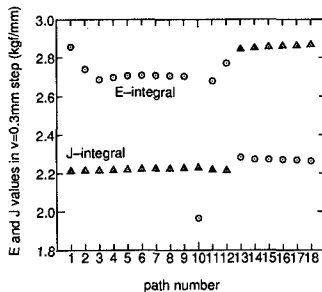


図6 E and J integral values for a 0.3mm load-point displacement.

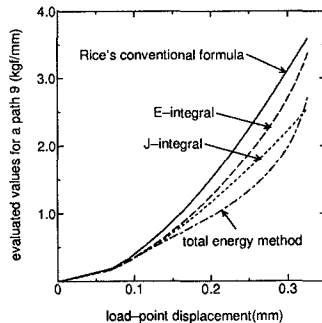


図7 Integral values for a path 9.

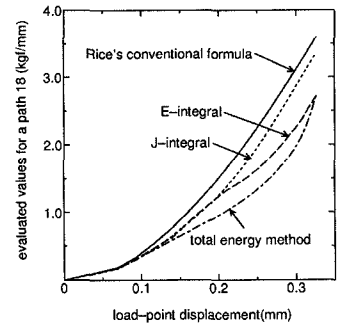


図8 Integral values for a path 18.

4. 結論

本研究では破壊力学的パラメータ E 積分の弾塑性解析を行い、弾塑性における E 積分の意味について検討した。その結果 E 積分はすでに報告にあるように塑性域固有の量であること、全エネルギー法の一般的な表現となっていること、さらには J 積分の簡便式といわれている Rice らの評価法は E 積分の簡便式であることなどが有限要素解析によりある程度説明できた。

参考文献

- 1) 矢富盟祥, 材料, Vol.35, No.394, pp.767-771, 1986.
- 2) Yatomi, C., Hashimoto, K. and Ishida, H., Lecture Note in Num. Appl., Vol.13, pp.61-74, 1994.
- 3) Rice, J. R., J. Appl. Mech., Vol.35, pp.376-386, 1968.
- 4) Rice, J. R., Paris, P. C. and Merkle, ASTM STP 536, pp. 231-245, 1973
- 5) 三好俊郎, 機誌, Vol.79, No.691, pp.60-66, 1976.
- 6) Yatomi, C., Int. J. Solid Structure, Vol.19, pp.183-187, 1983.