

東海大学海洋学部 正 員 ○北原 道弘
ユニテック 正 員 中川 克也

1. はじめに

三次元体内に存在する平面クラックによる散乱断面積の計算は、Martin と Wickham^[1], Budreck と Achenbach^[2]により平面波がクラック面に垂直に入射する場合について一解析例が示されているだけで、三次元半無限体内に存在する平面クラックを含めた一般的状況においては、散乱断面積の計算法が整備されていないのが現状である。散乱断面積は超音波を利用してクラック密度の推定を行なおうとする際に有効に活用できる一つの物理量であり、平面クラックによる散乱断面積の計算法を確立しておくことは非破壊評価の観点から重要と考える。

以下、散乱断面積の定義を要約した後、三次元半無限体内に存在する平面クラックによる散乱場の遠方表現を示し、これを利用して散乱断面積を計算するための具体的表現を導出する。最後に、散乱断面積の分布形態を表す散乱微断面積の解析例を示す。

2. 散乱断面積

散乱断面積 P は、散乱波が有するエネルギーを入射波の進行方向に垂直な散乱体の投影断面積に換算して表示したものであり、散乱波の時間平均パワーと入射波の時間平均インテンシティ $\langle I \rangle$ の比として定義さる。散乱断面積の方位依存性を表す散乱微断面積 $dP/d\Omega$ は次式により計算できる。

$$\frac{dP}{d\Omega} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\omega x^2}{2 \langle I \rangle} \text{Im}(\hat{x}_i \sigma_{ij}^{sc} u_j^{sc*})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \text{Im}(\hat{x}_i \sigma_{ij}^{sc} u_j^{sc*})}{k_L(\lambda + 2\mu)} \quad (1)$$

ここで、 $d\Omega$ は立体角である。また、 u_j^{sc} は散乱波、 σ_{ij}^{sc} は散乱波による応力、 $*$ は複素共役、 $\hat{x}_i$ は応力 σ_{ij}^{sc} が作用する面上の単位ベクトル、 x は散乱波を観測する遠方の点 $\mathbf{x}$ の座標原点からの距離 ($x = |\mathbf{x}|$)、 ω は角振動数である。また、式 (1) では、入射波を $\mathbf{p}$ 方向 ($|\mathbf{p}| = 1$) に進む単位振幅の平面縦波 $u_i^i = p_i \exp(ik_L \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$ として、入射波のインテンシティ

$$\langle I \rangle = -(1/2)\omega k_L(\lambda + 2\mu) \quad (2)$$

を代入している。ここで、 k_L は縦波の波数、 λ と μ はラメ定数である。式 (1) より、散乱微断面積は遠方における散乱波 $u_j^{sc}(\mathbf{x})$ を求めれば決まり、散乱微断面積 $dP/d\Omega$ が決まれば、散乱断面積 P は散乱微断面積の立体角 $d\Omega$ に関する積分によって求めることができる。

3. 遠方散乱場

式 (1) から半無限体内に存在するクラックによる散乱微断面積を求めるためには、遠方における散乱場 u_j^{sc} を計算する必要がある。この遠方散乱場は次のように書ける (Fig.1 参照)。

$$u_i^{sc}(\mathbf{x}) = \int_{S_c} \hat{\varepsilon}_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_k \Delta u_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (3)$$

ここに、 S_c はクラック面、 Δu_j はクラックの開口変位、 n_k はクラック面上の単位法線ベクトル、 $\hat{\varepsilon}_{ijk}$ は半無限表面

S_H 上の境界条件を満足する応力グリーン関数の遠方表現である。上式 (3) に応力グリーン関数の遠方表現を代入して整理すると次の結果を得る。

$$u_i^{sc}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=L,T,H} A_i^\alpha \frac{\exp(ik_\alpha x)}{x}$$

$$+ \sum_{\alpha=L,T,H} \sum_{\beta=L,T,H} A_i^{\alpha\beta} \frac{\exp(ik_\beta x)}{x} \quad \dots\dots (4)$$

ここに、 L は縦波、 T はソース点 $\mathbf{y}$ と観測点 $\mathbf{x}$ を含む面内に偏向した横波、 H はこの面外に偏向した横波を表す。また、 A_i^α はソース点 $\mathbf{y}$ から観測点 $\mathbf{x}$ に直接伝播する α 波の散乱振幅、 $A_i^{\alpha\beta}$ はソース点 $\mathbf{y}$ から α 波として発生した波動が半無限表面上で反射し β 波として遠方の観測点 $\mathbf{x}$ に到達する反射 β 波の散乱振幅である (Fig.2 参照)。散乱振幅 A_i^α と $A_i^{\alpha\beta}$ は次のように表現できる。

$$A_i^\alpha = ik_\alpha f_i^\alpha I_n^\alpha(\mathbf{y})$$

$$A_i^{\alpha\beta} = ik_\beta R_\beta^\alpha(\theta_\alpha) f_i^\beta d_n^\alpha I_n^\alpha(\mathbf{y}') \quad \dots\dots (5)$$

ここで、 f_i^α と d_n^α は Fig.2 に示すような α 波の偏向ベクトルであり、 R_β^α は半無限表面における α 波の β 波としての反射率である。また、 $I_n^\alpha(\cdot)$ は次のようである。

$$I_n^\alpha(\mathbf{z}) = -\frac{C_{kjni} M_i(\mathbf{z})}{4\pi\rho c_\alpha^2}$$

$$\times \int_{S_\alpha} n_k(\mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{y}) e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{z}} dS_y \quad \dots\dots (6)$$

上式において $M_i(\mathbf{z}) = \partial \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{z} / \partial y_i$ であり、具体的には

$$M_i(\mathbf{y}) = \hat{x}_i, M_i(\mathbf{y}') = \hat{x}_i(1 - 2\delta_{2i}) \quad \dots\dots (7)$$

となる。遠方応力場 $\sigma_{ij}^{sc}(\mathbf{x})$ を得るには、一般表現

$$\sigma_{ij}^{sc}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \partial u_k^{sc}(\mathbf{x}) / \partial x_l \quad \dots\dots (8)$$

に式 (4) を代入すればよく、結果を整理すると次のようになる。

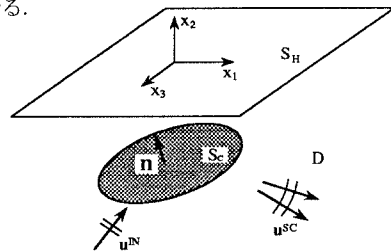


Fig.1 Crack S_c in elastic half-space

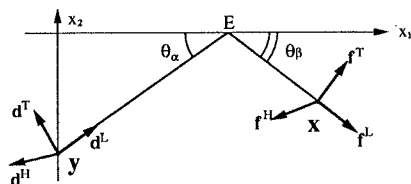


Fig.2 Reflected wave path (source: $\mathbf{y}$, observation: $\mathbf{x}$)

$$\sigma_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} B_{ij}^{\alpha} \frac{\exp(ik_{\alpha}x)}{x} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} B_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\exp(ik_{\beta}x)}{x} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 B_{ij}^{α} と $B_{ij}^{\alpha\beta}$ は散乱振幅 A_i^{α} と $A_i^{\alpha\beta}$ により次のように表される。

$$B_{ij}^{\alpha}(\mathbf{x}) = ik_{\alpha} \{ \lambda \delta_{ij} \hat{x}_k A_k^{\alpha} + \mu (\hat{x}_i A_j^{\alpha} + \hat{x}_j A_i^{\alpha}) \}$$

$$B_{ij}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = ik_{\beta} \{ \lambda \delta_{ij} \hat{x}_k A_k^{\alpha\beta} + \mu (\hat{x}_i A_j^{\alpha\beta} + \hat{x}_j A_i^{\alpha\beta}) \} \quad (10)$$

4. 散乱微分断面積の具体的表現

遠方散乱場 u_i^{α} と遠方散乱応力場 σ_{ij}^{α} は式(4)と(9)に与えられる。散乱微分断面積を表す式(1)にこの遠方散乱場と遠方応力場を代入して整理すると、次の結果を得る。

$$\frac{dP}{d\Omega} = |A^L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|A^T|^2 + |A^H|^2) + |B^L|^2 + \frac{k_L}{k_T} (|B^T|^2 + |B^H|^2) + 2\text{Re}\{A^L \cdot B^{L*}\} + 2\frac{k_L}{k_T} \text{Re}\{A^T \cdot B^{T*}\} + 2\frac{k_L}{k_T} \text{Re}\{A^H \cdot B^{H*}\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 A^{α} と B^{α} は次のようである。

$$A^{\alpha} = \{A_j^{\alpha}\}, B^{\alpha} = \sum_{\beta} \{A_j^{\beta\alpha}\} \dots\dots\dots (12)$$

式(11)の表現において、右辺の A^{α} に関する項はクラック面上の2次波源から観測点に直接伝播する直接波、 B^{α} に関する項は半無限表面で反射して観測点に伝わる反射波、 $A^{\alpha} \cdot B^{\alpha*}$ に関する項は直接波と反射波の干渉の影響を表している。

クラックの開口変位 Δu_i が求まれば、式(5),(6)より散乱振幅 A_i^{α} と $A_i^{\alpha\beta}$ が決まり、散乱微分断面積は式(11)により決まることになる。

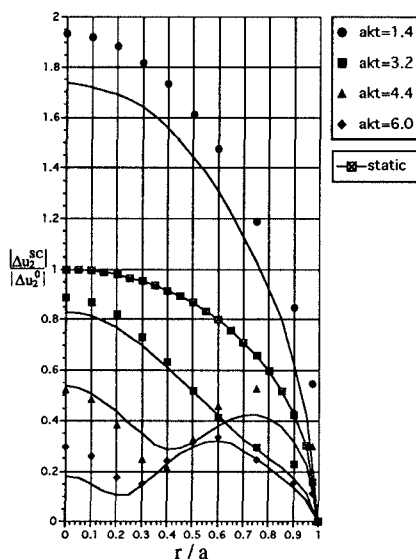


Fig.3 COD for circular crack in full space

5. 数値計算例

まず、境界要素法によるクラックの開口変位の計算過程の精度確認のため、無限体内に存在する円形クラックの開口変位をMalの結果^[3]と比較したものをFig.3に示す。横軸は円形クラックの半径 a で無次元化したクラック中心からの距離である。入射波は円形クラック面に垂直な軸(x_2 軸)方向に入射する平面縦波である。使用した要素は二次要素(接点数=181, 要素数=60)である。図中、Malの結果は実線で、ここでの数値計算結果は黒塗りの記号で表している。

半無限空間の表面付近に存在するクラックとして、Fig.4に示すように表面から $a/2$ の位置に半無限表面に平行に存在する円形クラックを考える。入射波は真下から x_2 軸に沿って入射する無限化波数 $ak_L = 0.3$ の縦波である。Fig.5に散乱微分断面積の分布を図示した。ここでは直接波成分 $(dP/d\Omega)^D$ を白丸、反射波成分 $(dP/d\Omega)^R$ を白四角、相互干渉成分 $(dP/d\Omega)^{DR}$ を白三角(負の値)、およびこれらの総和 $dP/d\Omega$ を黒丸で示している。

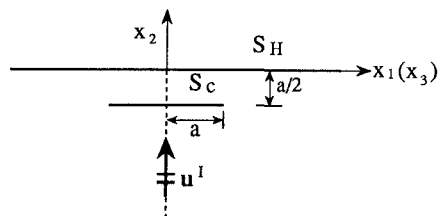


Fig.4 Circular crack in half-space

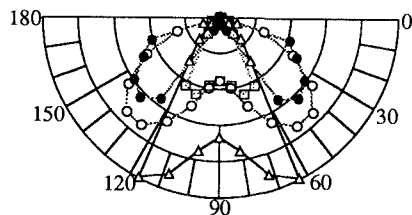


Fig.5 Differential cross-sections for circular crack in half-space ($ak_L = 0.3$)

6. おわりに

散乱微分断面積の計算式(11)は、半無限体の内部に存在するクラックに対して実体波成分(L, T, H)が有するエネルギーを表現したものとなっている。半無限体表面上に存在するクラックについては、表面波が有するエネルギー表現を作成する必要がある。

参考文献

- [1]Martin, P.A. and Wickham, G.R.: Diffraction of elastic waves by a penny - shaped crack: analytical and numerical results, Proc. R. Soc. Lond., **A390**, 91-129, 1983. [2]Budreck, D.E. and Achenbach, J.D.: Scattering from three - dimensional planar cracks by the boundary integral equation method, J. Appl. Mech., **55**, 405-412, 1988. [3]Mal, A.K.: Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack, Int. J. Engng Sci., **8**, 381-388, 1970.