

均質化法を取り込んだ逆解析による複合材料の微視的な力学特性の同定

名古屋大学 正会員 ○呉 旭
名古屋大学 正会員 市川康明

1、はじめに

複合材料の微視的な幾何学特性および各相の力学特性・界面特性が既知とする仮定の下で、代表体積要素（ユニットセル）から複合材料の巨視的な力学特性を評価する方法が多数存在している。しかし、代表体積要素における各構成材料の力学特性がすべて分かるという仮定が成立しない場合もある。本論文では、複合材料構造の境界値問題のマクロ的な観測量（たとえば、変位）から、複合材料のミクロ的な（たとえば、混合相あるいは界面）構成材料の力学特性を同定する一手法を提案するとともに、数値シミュレーションを行い提案手法の適用性を検討する。

2、問題の定式化

図-1に示すように、構造物 Ω の境界値問題を考える。 Ω の材料は周期的な微視構造（ユニットセル Y ）を有するものである。 Ω の変位境界 S_u と荷重境界 S_f が既知とする。 S_f において幾つか点の変位 $\mathbf{u}^{obs}$ が観測された場合には、ユニットセル Y 内の材料の未知力学パラメータ $\mathbf{p}$ （たとえば、 II 番材料の弾性係数 E_{II} とポアソン比 ν_{II} 、 $\mathbf{p} = \{E_{II} \quad \nu_{II}\}^T$ ）を同定する手法をつぎのように提案する。

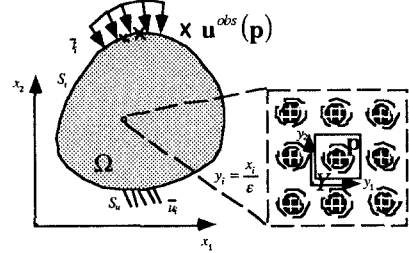


図-1 複合材料構造解析の概念図

(1) $\mathbf{u}^{obs}$ と $\mathbf{p}$ の関係式 $\mathbf{u}^{obs}(\mathbf{p})$ —均質化法の適用

均質化法^[1]によると、観測変位 $\mathbf{u}^{obs}$ を含んだ構造物 Ω の巨視的な平均変位場 $\mathbf{u}^0$ は、式(1)で表わす Ω の均質化された応力釣合式の弱形式で支配され、有限要素法を適用すれば容易に求められる。

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_i} \frac{\partial v_l^0}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i^H(\mathbf{x}) v_i^0 d\Omega + \int_{S_f} t_i v_i^0 ds \quad (1)$$

ここで、 $E_{ijkl}^H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ は均質化弾性テンソルであり、 $f_i^H(\mathbf{x})$ は均質化体積力である。 $E_{ijkl}^H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ はユニットセル Y 内の変位特性関数 $\chi^{(kl)}(\mathbf{p})$ を用いて、式(2)のように計算される。

$$E_{ijkl}^H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}) - E_{ijpq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}) \frac{\partial \chi_p^{(kl)}(\mathbf{p})}{\partial y_q} \right) dy \quad (2)$$

ただし、変位特性関数 $\chi^{(kl)}(\mathbf{p})$ は、式(3)で表わすユニットセル Y 内の微視的な応力釣合式の弱形式および $\chi^{(kl)}(\mathbf{p})$ の Y 境界での周期性条件より、有限要素法を適用すれば容易に求められる。

$$\int_Y E_{ijpq}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}) \frac{\partial \chi_p^{(kl)}(\mathbf{p})}{\partial y_q} \frac{\partial v_l}{\partial y_j} dy = \int_Y E_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}) \frac{\partial v_l}{\partial y_j} dy \quad (3)$$

したがって、均質化法の適用により、構造物の観測変位 $\mathbf{u}^{obs}$ とユニットセル内の材料の未知力学パラメータ $\mathbf{p}$ の関係式 $\mathbf{u}^{obs}(\mathbf{p})$ は、有限要素法を介して数値的に結ばれている。

(2) $\mathbf{u}^{obs}$ から $\mathbf{p}$ を同定するアルゴリズム—拡張カルマンフィルターフィルタの適用

ユニットセル内の材料の未知力学パラメータ $\mathbf{p}$ は時間に依存しない未知状態ベクトルとする。状態方程式は(4)式で、観測方程式は(5)式で表わす。

$$\mathbf{p}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t/t} + \mathbf{w}_t \quad (4) \quad \mathbf{u}_t^{obs} = \mathbf{u}_t(\mathbf{p}) + \mathbf{v}_t \quad (5)$$

拡張カルマンフィルターフィルタ^[2]によると、適当な初期値 $\mathbf{p}_{0/0}$ と $\mathbf{P}_{0/0}$ から出発し、つぎの繰り返し計算により観測データ $\mathbf{u}^{obs}$ を取り入れることにつれ、未知状態ベクトル $\mathbf{p}$ を同定することが³できる。

$$\begin{aligned} \text{状態方程式による更新:} \quad & \mathbf{p}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t/t} \\ & \mathbf{p}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t/t} + \mathbf{Q}_{t+1} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{カルマンゲイン:} \quad \mathbf{G}_{t+1/t} = \mathbf{p}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}^T (\mathbf{H}_{t+1/t} \mathbf{p}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}^T + \mathbf{R}_{t+1})^{-1} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{観測による更新:} \quad & \mathbf{p}_{t+1/t+1} = \mathbf{p}_{t+1/t} + \mathbf{G}_{t+1/t} (\mathbf{u}_t^{obs} - \mathbf{u}(\mathbf{p}_{t+1/t})) \\ & \mathbf{p}_{t+1/t+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t}) \mathbf{p}_{t+1/t} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{H}_{t+1/t})^T + \mathbf{G}_{t+1/t} \mathbf{R}_{t+1} \mathbf{G}_{t+1/t}^T \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、感度行列 $\mathbf{H}_{t+1/t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{t+1/t}}$ は中心差分法で求め、そこに均質化法の有限要素解を用いられ、変位特性

関数 $\chi^{(kl)}(\mathbf{p})$ の周期条件はペナルティ法で取り込んでいる。また、 $\mathbf{w}_i$ はシステムノイズであり、 $\mathbf{v}_i$ は観測ノイズである。 $\mathbf{Q}_i = E[\mathbf{w}_i \otimes \mathbf{w}_i]$ 、 $\mathbf{R}_i = E[\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i]$ 。 $\mathbf{P}$ は推定誤差共分散であり、 $\mathbf{P} = E[(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \otimes (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})]$ 。 $E[\bullet]$ は期待値演算子である。

3、数値シミュレーション

図-2に示すように、簡単な引っぱり試験片の一点（節点25）の観測変位から、試験片材料の微視構造（ユニットセル）内における未知材料の弾性係数 E とポアソン比 ν を同定する数値シミュレーションを行う。二種類のユニットセルについての同定結果を以下に示す。

(1) ユニットセル I は二種類の線弾性材料(A,B)で構成され、材料Aの弾性係数 E_A とポアソン比 ν_A が既知で、材料Bの弾性係数 E_B とポアソン比 ν_B は試験片の観測変位から同定する。図-3に示すように E_B だけを同定する場合は、広範囲の初期値（真値に対して正負3桁）で速い収束の結果を得られた。 E_B と ν_B を同時に同定する場合でも、安定な収束過程を見せた（図-4）。(2) ユニットセル II は二種類の線弾性材料(A,B)と三種類の線弾性材料(A,B,C)二通りの構成を仮定し、 E_B と ν_B を未知とする。図-5、図-6に示すように、いずれの場合でも、良好な同定解析結果を得られた。

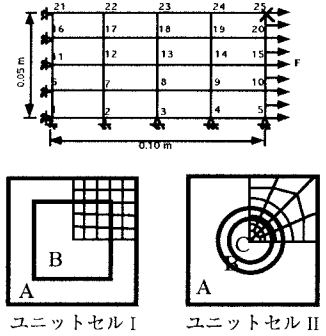


図-2 逆解析の例

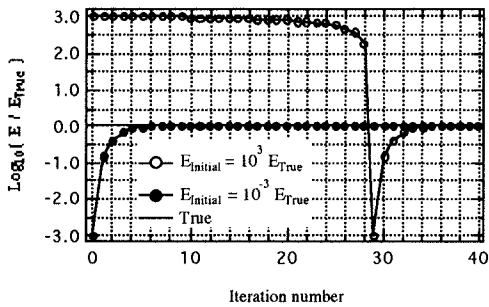


図-3 弾性係数の同定（ユニットセル I）

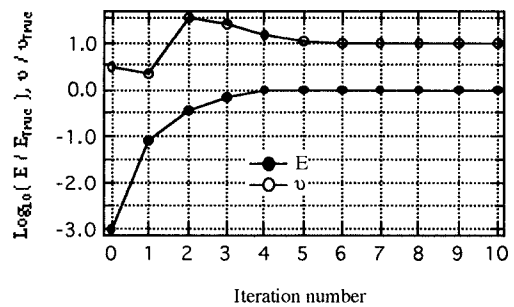


図-4 弾性係数とポアソン比の同定（ユニットセル I）

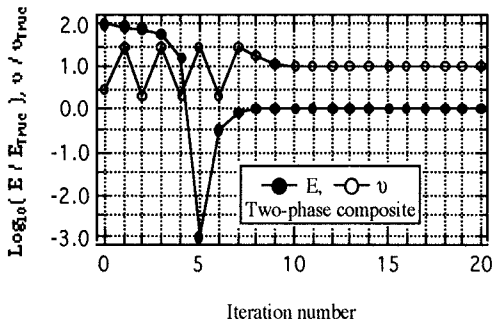


図-5 二相複合材料の同定（ユニットセル II）

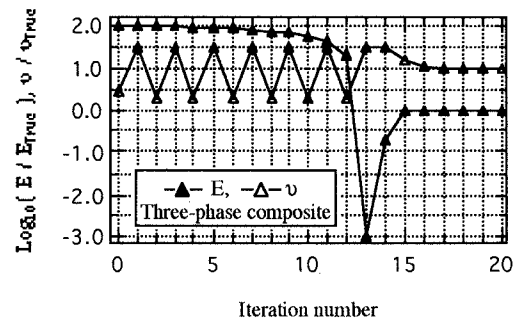


図-6 三相複合材料の同定（ユニットセル II）

4、おわり

均質化法を取り込んだ逆解析による複合材料の微視構造内の未知力学特性を評価する手法を提案した。多相線弾性複合材料の未知相の弾性係数とポアソン比の同定解析を行い、広範囲の初期値に対しても良い同定結果を得られました。提案手法の実問題への適用性の検討が必要であり、今後の課題とする。

参考文献 [1] Sanchez-Palencia, E. (1980): Nonhomogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 127. Springer-Verlag, Berlin. [2] Jazwinski, A. H. (1970): *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic press.