

CS-24

波動せん断力を応用した弾性棒における動的モーメントについて

松尾建設 正会員 佐々木定

1.はじめに

波動方程式に対するダランベールの解より、一次元連続体において生じる動的な垂直応力とせん断応力が求められる¹⁾。また、梁や柱の連続弾性体についてせん断応力とモーメントの関係が求められている²⁾。

本発表はこれらの関係を用いて弾性棒中に生じる動的なモーメントについて考察したものである。波動垂直応力と波動せん断応力は変位速度に比例し、波動モーメントは変位量に比例することとなる。この関係を応用することにより、動的な現象下に発生する梁や柱に生じる応力やモーメントを把握することを試みた。

2.波動応力

ダランベールの波動解より求まる一次元の弾性体に生ずる波動応力は、次の式で表わされる¹⁾。

$$\begin{aligned}\sigma^+ &= -\rho C_P v^+ & \tau^+ &= -\rho C_S v^+ \\ \sigma^- &= \rho C_P v^- & \tau^- &= \rho C_S v^- \\ \sigma &= \sigma^+ + \sigma^- & \tau &= \tau^+ + \tau^-\end{aligned} \quad (1)$$

ここで

σ : 垂直応力 ρ : 弾性体の密度 右肩⁺ : 前進波動
 τ : せん断応力 v : 変位速度 右肩⁻ : 後退波動
 C_P : 垂直波動伝播速度 ($E/\rho = C_P^2$) E : ヤング率
 C_S : せん断波動伝播速度 ($G/\rho = C_S^2$) G : せん断弾性係数

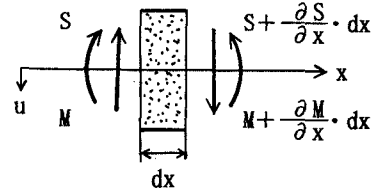


図-1 梁におけるせん断力とモーメントの関係

3. 波動モーメント

梁や柱のような連続弾性体においては、図-1のごとく弾性体中の微小区間 dx において、せん断力 S とモーメント M の間には高次の項を省略して

$$dM = S dx \quad \therefore M = \int S dx \quad (2)$$

の関係が得られる²⁾。

本発表では、断面積 A を持つ弾性棒に対する波動モーメントを考察するものとする。

棒端部に力が加えられ、棒中に波動が導入されると、棒中の各部に変位が生じ、従ってヒズミすなわち応力が生じる。そのうち、波動せん断応力は式(1)より求められるので、棒中に生じる波動モーメントは式(2)によって求められることとなる。すなわち前進波動、後退波動毎に波動モーメントが求められ

$$M^+ = \int A \tau^+ dx \quad M^- = \int A \tau^- dx \quad (3)$$

となる。さらに、式(1)の波動せん断応力と変位速度の関係と、波動伝播の関係 $dx = C dt$ を用いると

$$M^+ = \int A (-\rho C_S v^+) dx = A (-\rho C_S^2) \int v^+ dt = -AG u^+ \quad (4)$$

$$M^- = \int A \rho C_S v^- dx = A \rho C_S^2 \int v^- dt = AG u^-$$

となり、波動モーメントは弾性棒中の変位量に比例することとなる。

以上の関係を用いて、前進波動と後退波動における力の作用端と棒中に生ずる変位 u 、変位速度 v 、せん断ヒズミ γ 、せん断力 S 、モーメント M の伝播の状況を表示すると、図-2のごとくなる。

4. 境界条件による変化

(1) 力の作用端 A より棒中に導入された波動は、棒の他端 B において、 B 端の条件に従って変化する。

① B 端が固定端、自由端である場合を図-3に示す。

② B 端が任意力 S_B や変位 u_B で制御されている場合や他の部材からの影響を受けている場合は

$$u^- = u_B - u^+ \quad v^- = v_B - v^+ \quad (5)$$

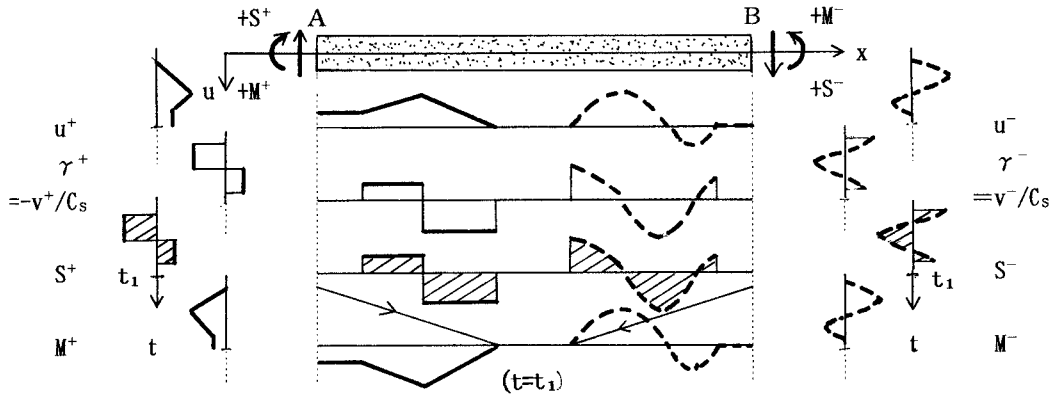


図-2 波動モーメント（位置x軸上側と時間t軸右側を+値にとる）

$$M^- = M_B - M^+ \quad S^- = S_B - V^+ \quad (5)$$

(2) A端においても同様な考察によって

$$u^+ = u_A - u^- \quad v^+ = v_A - v^- \quad (6)$$

$$M^+ = M_A - M^- \quad S^+ = S_A - S^-$$

5. 応用

以上に求めたことを基に、コンクリート柱部材へ応用してみる。
部材の諸元を次のように仮定する。

断面積	$A = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$	
密度	$\rho = 2.5$	gr/cm^3
垂直波動伝播速度	$v_p = 5.0$	km/sec
ヤング率	$E = 6.3 \times 10^5$	kgf/cm^2
セン断波動伝播速度	$v_s = 2.5$	km/sec
セン断弾性係数	$G = 1.6 \times 10^5$	kgf/cm^2

(1) 初期波動によって生じる垂直応力：

垂直変位速度	$v^+ = 50 \text{ cm/sec}$ のとき
垂直ヒズミ	$\varepsilon^+ = -50/5 \text{ cm/s} \cdot \text{s/km}$
垂直応力	$\sigma^+ = -63 \text{ kgf/cm}^2$
垂直力	$P^+ = -630 \text{ tf}$

(2) 初期波動によって生じるセン断応力：

セン断変位速度	$v^+ = 50 \text{ cm/sec}$ のとき
セン断ヒズミ	$\gamma^+ = -50/2.5 \text{ cm/s} \cdot \text{s/km}$
セン断応力	$\tau^+ = -32 \text{ kgf/cm}^2$
セン断力	$S^+ = -320 \text{ tf}$

(3) 初期波動によって生じるモーメント：

変位量	$u^+ = 0.1 \text{ cm}$ のとき
モーメント	$M^+ = -1600 \text{ tf} \cdot \text{m}$

(4) 柱部材に生じる応力とモーメント：当日に発表する。

6. 文献

- 1) Kolsky, H.; Stress wave in solids, Dover Publication, Inc., pp. 41~47, 1952
- 2) 荒井利一郎；応用力学、技報堂、pp. 60~61, 1957

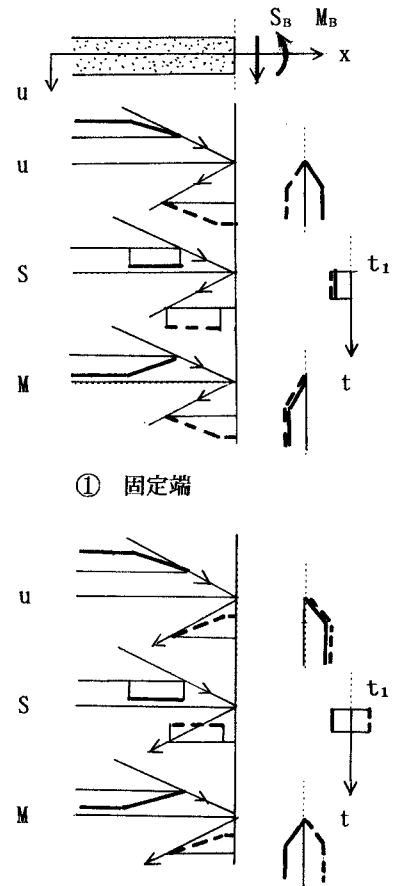


図-3 B端での反射波動