

## CS-20

任意の微視構造を有する材料の力学的挙動  
の数値解析

東北大学 ○正 員 小山 茂  
東北大学 正 員 岩熊 哲夫  
東京大学 正 員 堀 宗朗

## 1. はじめに

介在物問題でよく用いられる等価介在物法<sup>1)</sup>は, Eshelby の研究<sup>2)</sup>に基礎を置いている. Eshelby は, 介在物の形状が楕円体である場合, その内部に発生する応力(ひずみ)が一定の値となることを示した. この結果を利用することにより, 楕円体介在物を有する材料の力学的挙動を, 解析的にしかも比較的容易に求めることができる. しかしながら, これはごく限られたケースであり, 介在物の形状がそれら以外のものとなると, 解析的な予測はほぼ不可能となる. そこで, 任意の形状の介在物を有する材料に発生する応力(ひずみ)分布を数値的に求め, より広範囲な不均一材料の力学的挙動を予測する手法を紹介する.

## 2. 解析方法

解析対象の一例として, 図-1 左に示すような不均一な材料を考える. 図中の網掛けの部分を介在物, その他の部分を母材とし, それぞれの弾性定数を  $C^i (i = 1, 2, 3)$ ,  $C^M$  とする. したがって, 場所によっては異なった材料が存在するために, この材料全体の弾性定数は場所の関数  $C = C(x)$  となり, 構成則は,

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}(x) \epsilon_{kl}(x) \dots\dots\dots (1)$$

と表せる. しかしながら, 材料特性の異なる物体が存在する問題は解きにくい. そこで等価介在物法では, 図-1 右に示すように, 不均一な材料を弾性定数  $C^o$  の単一材料に置換える一方で, 残留応力のようなもの  $\sigma^{*i} (i = 1, 2, 3)$  を分布させて問題を解く. ここで,  $\sigma^{*i} (i = 1, 2, 3)$  はアイゲン応力と呼ばれ, 単一材料に置換えられた材料内部の応力が, 元の材料内部の応力に等しくなるように決めなければならない未知量である. すると, 式(1)は次のように書き改められる.

$$\sigma_{ij}(x) = C_{ijkl}^o \epsilon_{kl}(x) + \sigma_{ij}^{*i}(x). \dots\dots\dots (2)$$

また, この問題のつり合い式は,

$$\sigma_{ij,i}(x) = C_{ijkl}^o (\epsilon_{kl,i}^o + \epsilon_{kl,i}^d)(x) + \sigma_{ij,i}^{*i}(x) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

となる. ここで, 右辺第二項はひずみを平均成分と介在物が存在するために生じる乱れ成分とに分解したことを表している. このつり合い式は, 均一な材料に外力  $\sigma_{ij,i}(x)$  が作用したときのものと解釈することができる. したがって, 弾性定数  $C^o$  を持つ均一体のグリーン関数により, 式(3)の解が

$$u_i^d(x) = \int_{x'} G_{ik,l}(x - x') \sigma_{kl,i}^{*i}(x') dx' \dots\dots\dots (4)$$

となるので, 応力やひずみといった材料の物理量はすべて  $\sigma^*$  によって表すことができる. また, 未知数であるアイゲン応力は, 介在物のある場所での応力の等価性から, 式(1)式(2)により, 次式から求められる.

$$(C_{ijkl} - C_{ijkl}^o)^{-1} \sigma_{kl}^{*i} - \epsilon_{ij}^d - \epsilon_{ij}^o = 0. \dots\dots\dots (5)$$

介在物が楕円体の場合, 式(5)の第二項が介在物の内部で一定となるため, 不均一な材料の挙動を解析的に求めることができる. ところが, 介在物が任意の形状を持つ場合, 解析的に求めることはほぼ不可能で, 数値的な解析を行うことが必要となる. Hashin と Shtrikman は次に示す汎関数の第一変分が式(5)となること, つまり,  $s^* = \sigma^*$  となるときに  $I$  が停留するということを導いた<sup>3)</sup>.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \epsilon_{ij}^o C_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^o dV \\ &- \frac{1}{2} \int_{x'} s_{ij}^{*i} \{ (C_{ijkl} - C_{ijkl}^o)^{-1} s_{kl}^{*i} - \epsilon_{ij}^d - 2\epsilon_{ij}^o \} dV \\ u_i^d &= 0 \text{ or } n_i \sigma_{ij}^d = 0 \text{ on } \partial V \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで,  $V$  は材料内部の領域を  $\partial V$  は材料表面を表す. また,  $\sigma^o$  は平均応力を表し,  $\sigma^d$  は  $\sigma - \sigma^o$  によって定義される. そこでここでは, 式(6)を汎関数とする有限要素解析を行いアイゲン応力を求めることにする.

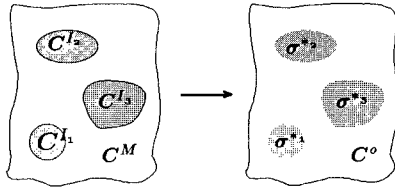


図-1 等価介在物法

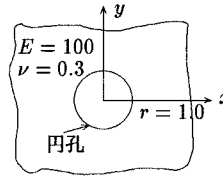


図-2 解析対象

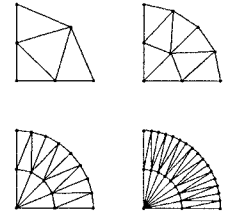


図-3 要素分割

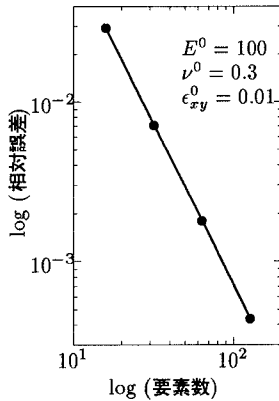


図-4 要素数と  $\sigma^d_{xy}$

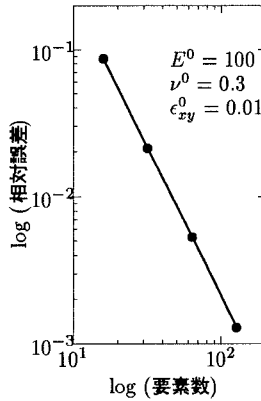


図-5 要素数と  $\epsilon^d_{xy}$

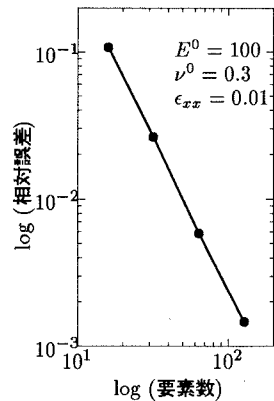


図-6 要素数と応力集中係数

### 3. 数値解析例

本方法による解析例を示す。解析解との比較のために、対象を 図-2 に示すような一個の円孔を持つ無限板とする。板のヤング率  $E$ ，ポアソン比  $\nu$ ，円孔の半径  $r$  は図中に示す値を用いた。

有限要素解析は、「定アイゲン応力」三角形要素とした。この時の式 (6) のひずみの乱れ成分の項は、式 (4) を微分したものではなく、

$$u_i^d(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}'} G_{ik,l}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad \dots\dots\dots (7)$$

を各節点について求め、得られた節点変位 (の乱れ成分の) ベクトルに、通常の有限要素法で使われる節点変位とひずみとを関係付けるマトリックス  $[B]$  を乗じたものを用いた。また、式 (7) は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x}'$  が同一領域であれば特異積分となるが、三次元の境界要素法と同様に数値積分によって評価することができる。

平均化には無限板の材料定数と同じ値を用い、要素分割は円孔部分のみとし、要素数として 16, 32, 64, 128 を採用した。円孔 1/4 部分の要素分割を図-3 に示す。

図-4 と図-5 に、一様なせん断ひずみ  $\epsilon^0_{xy} = 0.01$  を与えたときの結果を示す。図-4 がアイゲン応力  $\sigma^*_{xy}$ 、図-5 がひずみの乱れ成分  $\epsilon^d_{xy}$  についてのもので、両図共に、横軸を要素数、縦軸を数値解の解析解に対する相対誤差として両対数で示したものである。また、数値解として、全領域の平均値を用いた。両図から明らかなように、本数値解は解析解に収束することがわかる。図-6 は、一様な引っ張り  $\epsilon^0_{xx}$  を与えたときの応力集中率を表したものである。縦軸は要素数、横軸は数値解析で得られた応力集中率の実際の応力集中率 3 に対する相対誤差であり、両対数で示してある。この場合も本数値解は解析解に収束している。

### 参考文献

- 1) Mura, T. : *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982.
- 2) Eshelby, J.D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. A214, pp376-396, 1957.
- 3) Hashin, Z. and Shtrikman, S. : On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 10, pp.335-342, 1962.