CS－18

弾塑性複合材の Global-Local 解析

ミシガン大学機械工学および応用力学科　学生会員　寺田賢二郎
ミシガン大学機械工学および応用力学科　非会員　菊池　昇

１．はじめに　今日の複合材料の普及は，廉価な材料をめざした製造技術革新と，その優れた材料特性を引き出すための材料の設計を可能にした複合材の力学の発展に負うところが大きい．１９５０年代から７０年代にかけての複合材料の研究[1]は，現在もマイクロメカニクスを含む理論力学の体系のなかで引き継がれ，拡張または応用されている．とくに全体構造物を評価する際の複合材料の平均的な力学物性（有効物性）を評価する研究は歴史も古く，線形問題に関しては実用に供されている．しかしながら，この理論力学の枠組みの中では，ミクロとマクロの力学応答はほとんどの場合一方通行である．例えば，材料の幾何学的配置を考慮して全体構造物の有効物性値を求めたにも関わらず，その材料の降伏（破壊）の判定の際には，ミクロへ立ち帰る手段を持たないが為に，平均的な，あるいはマクロ的な破壊則を導入せざるを得ないのである．すなわち，微視構造の変化を知ることができないので，破壊後の挙動を追うことが不可能になる．したがって，より合理的な材料と構造物の設計には，ミクロとマクロの力学挙動を互いに関連させながら求めて行く手法，すなわち，Global-Local解析法が望まれる．１９７０年代に数学理論の発展をへて，近年注目を集めている均質化法[2]（Homogenization method）もその一方法論であり，土木工学の分野でも，京谷らの研究[3]によって浸透しつつある．本研究では，この２変数表示による漸近展開法をもとにした均質化法を用いて，弾塑性複合材料からなる構造物の Global-Local解析を試みる．

２．定式化　増分（または速度）形による更新Lagrangian型の定式化を用いることによって，支配方程式の瞬間的な線形性が保障されるため，微視・巨視的な変数の分離が可能になり，線形弾性体からなる複合材に対する均質化法が拡張できることが示される．したがって，構造物全体の平均的な力学挙動を求めることは，座標更新時の”均質化された接線剛性”を求める問題に帰着するのである．そこでは，均質化法の局所化過程において得られる微視構造内の詳細な応力分布を個々の構成材料の降伏の判定に用いることができるので，”均質化された”降伏条件を用いる必要がなくなる．このような定式化で有限要素解析を行うことで，複合材料の複雑な非線形力学挙動が，全体構造および微視構造の両方で明らかにされる．この定式化では，大変形・微小ひずみを仮定し，材料としては，構成材料が古典的な破壊則（Von-Misesの降伏条件）および弾塑性構成則（関連流れ則と等方ひずみ硬化）に従うような金属複合材料を用いる．
更新 Lagrangian 型の支配方程式として，

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \dot{\boldsymbol{S}} : \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varepsilon d\Omega + \int_{\Omega^\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon : \left(\boldsymbol{L}^{\varepsilon T}\delta\boldsymbol{L}^\varepsilon\right) d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} \rho^\varepsilon \dot{\boldsymbol{f}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon d\Omega + \int_{\Gamma_t} \dot{\hat{\boldsymbol{T}}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon ds, \quad \forall\delta\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon \tag{1}$$

を採用する[5]．ここに，$\dot{\boldsymbol{S}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^\varepsilon_{(J)} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varepsilon\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varepsilon$ は第二Piola-Kirchhoff応力の速度，$\dot{\boldsymbol{u}}^\varepsilon$ は第一変数である速度であり，$\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$，$\boldsymbol{L}^\varepsilon$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，$\rho^\varepsilon \boldsymbol{f}$，$\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}$ はそれぞれ真応力，速度勾配，ひずみ速度，物体力速度，荷重境界での応力ベクトルの速度である．J_2理論による構成式を仮定して，相対Kirchhoff応力のJaumann速度は，

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^\varepsilon_{(J)} = \boldsymbol{D}^\varepsilon\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varepsilon = \left(\boldsymbol{D}^{e\varepsilon} - \alpha\boldsymbol{D}^{p\varepsilon}\right)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varepsilon, \quad \text{with } D^{p\varepsilon}_{ijlm} = \frac{D^{e\varepsilon}_{ijpq}\sigma'^{\varepsilon}_{pq}\sigma'^{\varepsilon}_{rs}D^{e\varepsilon}_{rslm}}{4H'(\bar{\sigma}^\varepsilon)^2/9 + \sigma'^{\varepsilon}_{pq}D^{e\varepsilon}_{pqrs}\sigma'^{\varepsilon}_{rs}} \tag{2}$$

で定義される．ここに，$\boldsymbol{D}^\varepsilon$ は弾性係数であり $\boldsymbol{\sigma}'$，$\bar{\sigma}$ はそれぞれ偏差および等価応力である．漸近展開による均質化法の手続きを経て，ミクロの問題として，

$$\int_Y a_{ijlm}(\boldsymbol{y})\frac{\partial w_i}{\partial y_j}\frac{\partial\chi^{kh}_l(\boldsymbol{y})}{\partial y_m}dY + \int_Y \sigma_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial w_p}{\partial y_i}\frac{\partial\chi^{kh}_p(\boldsymbol{y})}{\partial y_j}dY = \int_Y \left(a_{ijkh}(\boldsymbol{y}) + \delta_{ik}\sigma_{jh}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)\frac{\partial w_i}{\partial y_j}dY \quad \forall\boldsymbol{w} \tag{3}$$

マクロの問題として，

$$\int_{\Omega}\left(a^{H}_{ijkh}+\pi^{H}_{ijkh}\right)\frac{\partial \dot{v}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \dot{u}^{0}_{k}}{\partial x_h}d\Omega=\int_{\Omega}\rho^{H}\dot{f}_p\dot{v}_p d\Omega+\int_{s}\dot{\hat{T}}_p\dot{v}_p ds \qquad \forall v \tag{4}$$

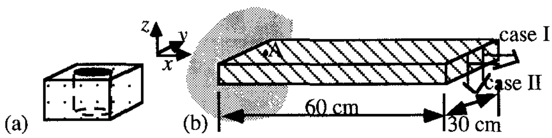
を得る．ここに，

$$\rho^{H}=1/|Y|\int_{Y}\rho(y)dY,\ \ \pi^{H}_{ijkh}=\frac{1}{|Y|}\int_{Y}\left(\delta_{ik}\sigma_{jh}-\sigma_{jp}\frac{\partial \chi^{kh}_{i}}{\partial y_p}\right)dY,\ \ a^{H}_{ijkh}=\frac{1}{|Y|}\int_{Y}\left(a_{ijkh}-a_{ijlm}\frac{\partial \chi^{kh}_{l}}{\partial y_m}\right)dY \tag{5}$$

で定義される量は，微視構造もしくは，式(1)の解である特性変位 χ^{kh}_{l} の関数である．この二つの問題を同時に解くことで，近似的ではあるが， Global-Local解析が可能となる．

3．数値解析

図－1に示されるようなユニットセル(a)よりなる構造物(b)を考える．セル内の複合構造は繊維強化材を用いる．全体構造物の2辺は固定され，片方をx-方向（case-I），z-方向（case-II）に移動させるものとする．図－2は，それぞれ繊維がx 軸とz 軸に平行に配置されている場合の全体構造物の荷重－変位関係である．また，図－3には，case-IIでの相当塑性ひずみ増分の分布を示す．この分布は全体構造物では図－1(b)のA点にあるユニットセルが降伏し始めたときのものである．



matrix (alminium) $E=$ 73 GPa, $\nu=0.33$, $\sigma_Y=400$ MPa
fiber (boron) $E=400$ GPa, $\nu=0.20$, ($V_f=46\%$)

図-1 Microstructure (a) と Macrostructure (b)

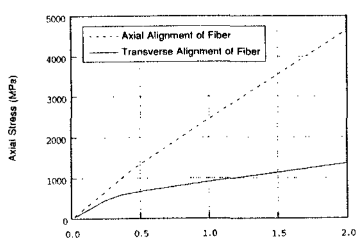


図-2 単純引張における平均的な荷重変位曲線

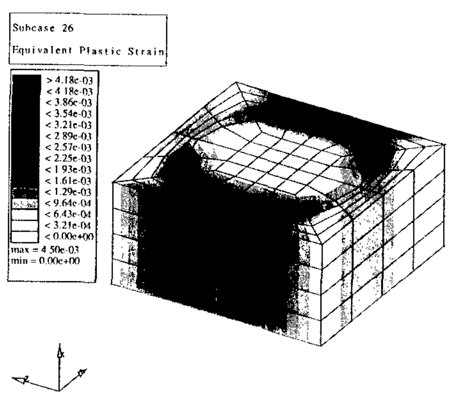


図-3 塑性域の分布

4．結語

均質化法を用いることで，弾塑性体からなる微視構造（ユニットセル）内での応力と幾何学形状の変化を考慮しながら，全体構造物の解析が可能であることが示された．今回の研究では，金属複合材をターゲットにしたが，ここで紹介した定式化を用いて，塑性以外の微視的な材料の破壊を考慮することも可能である．局所的な周期性の乱れが及ぼす影響等の問題点はあるが，今後，より発展的な議論が期待されよう．

参考文献

(1)（例えば）Hashin, Z., *Analysis of composite materials - A survey*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, (1983), 481-505.（およびその参考文献）
(2) T. Kawamoto, and T. Kyoya, *Some applications of homogenization method in rock mechanics*, Seminer on Computional Mechanics to Engineering Problems, N.S.W., Australia, (1993)
(3) Sanchez-Palencia, E., *Non Homogeneous media and vibration theory.*, (1980)
(4) Guedes, J.M., *Nonlinear computational models for composite materials using homogenization*, Ph.D. dissertation thesis, The University of Michigan., (1989)
(5) 久田俊明，非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎，丸善，(1992).