土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

CS－17

粘弾性材料の均質化解析

名古屋大学　　正会員　　　　市川　康明

1. はじめに

均質化法(homogenization analysis: Sanchez-Palencia 1980)はミクロレベルにおける非均質な繰り返し構造を有する物体に対して、その構造を反映したマクロレベルの材料定数を定め、さらには求まった（大域）解からミクロな“応力分布”を定めることのできる理論である(Figure 1)。ここでは均質化法を粘弾性体に適用する方法について述べる。

2. 粘弾性体の均質化法

粘弾性問題はLaplace空間において弾性問題に対応している。本稿ではLaplace空間において均質化法を導入し、求められたマクロ・ミクロ応力をSchapery(1961)の方法によってLaplace逆変換を施し、マクロ・ミクロ応力の時間応答を求める手法を採った(Figure 2)。

Laplace空間における粘弾性問題の支配方程式と構成式は以下のように書ける。

$$(\text{支配方程式}):\ \frac{\partial \hat{\sigma}^{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_j} + \hat{f}^{\varepsilon}_i = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega^{\varepsilon} \tag{1}$$

$$(\text{構成則}):\ \hat{\sigma}_{ij}(p) = p(2\hat{G}\hat{\varepsilon}_{ij} + \hat{\lambda}\hat{\varepsilon}_{rs}\delta_{rs}\delta_{ij}) = p\hat{D}_{ijrs}\hat{\varepsilon}_{rs} = \hat{M}_{ijrs}\hat{\varepsilon}_{rs} \tag{2}$$

$$\hat{\lambda}(p) = \hat{K}(p) - \frac{2}{3}\hat{G}(p), \quad \hat{G}(p) = \frac{G_0}{p} + \sum_{i=1}^{n}\frac{G_i}{p + (1/\tau^s_i)}, \quad \hat{K}(p) = \frac{K_0}{p} + \sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{p+(1/\tau^v_i)}$$

Laplace空間における変位$\hat{u}^{\varepsilon}_i(\boldsymbol{x},p)$をつぎのように漸近展開する。

$$\hat{u}^{\varepsilon}_i(\boldsymbol{x},p) = \hat{u}^0_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p) + \varepsilon\hat{u}^1_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p) + \varepsilon^2\hat{u}^2_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p) + \cdots \tag{3}$$

ここで、$\hat{u}^{\alpha}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p) = \hat{u}^{\alpha}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Y},p)$はY-periodicな関数である。いま、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\varepsilon$であることに注意し、$\varepsilon \to 0$とすると、原空間$\boldsymbol{x}$における微分は

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{4}$$

と変換されるので、支配方程式(1)は

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial\hat{\sigma}^0_{ij}}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon}[\frac{\partial\hat{\sigma}^0_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial\hat{\sigma}^1_{ij}}{\partial y_j}] + [\frac{\partial\hat{\sigma}^1_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial\hat{\sigma}^2_{ij}}{\partial y_j}] + \cdots = -\hat{f}^{\varepsilon}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p) \tag{5}$$

$$\hat{\sigma}^0_{ij} = \hat{M}_{ijkl}\hat{\varepsilon}^{0y}_{kl}, \quad \hat{\sigma}^1_{ij} = \hat{M}_{ijkl}(\hat{\varepsilon}^{0x}_{kl} + \hat{\varepsilon}^{1y}_{kl}), \quad \hat{\sigma}^2_{ij} = \hat{M}_{ijkl}(\hat{\varepsilon}^{1x}_{kl} + \hat{\varepsilon}^{2y}_{kl})$$

$$\hat{\varepsilon}^{0y}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{u}^0_i}{\partial y_j} + \frac{\partial\hat{u}^0_j}{\partial y_i}), \quad \hat{\varepsilon}^{0x}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{u}^0_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\hat{u}^0_j}{\partial x_i}), \quad \hat{\varepsilon}^{1y}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial\hat{u}^1_i}{\partial y_j} + \frac{\partial\hat{u}^1_j}{\partial y_i}), \quad \cdots$$

と書ける。ここで、$\varepsilon^{\alpha}(\alpha = -2,-1,0,1..)$に関する各項を0置いて、以下の式を得る。

$$\mathrm{O}(\varepsilon^{-2})\ \text{項}:\ \frac{\partial\hat{\sigma}^0_{ij}}{\partial y_j} = 0 \tag{6}$$

この式は、$\hat{\sigma}^0_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p) = \hat{\sigma}^0_{ij}(\boldsymbol{x},p)$を意味するが、これは$\hat{u}^0_i(\boldsymbol{x},p)$から明らかである。また、$\varepsilon^{-1}$項の有界性から$\hat{\sigma}^0_{ij} = 0$と置いてよい。

$$\mathrm{O}(\varepsilon^{-1})\ \text{項}(\text{微視方程式}):\ \frac{\partial\hat{\sigma}^1_{ij}}{\partial y_j} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial y_j}\{[D^0_{ijrs}(\boldsymbol{y}) + p\hat{D}^1_{ijrs}(\boldsymbol{y},p)][\hat{\varepsilon}^{0x}_{rs}(\boldsymbol{x};p) + \hat{\varepsilon}^{1y}_{rs}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};p)]\} = 0 \tag{7}$$

$$D^0_{ijrs} = 2G_0\delta_{ri}\delta_{sj} + \lambda_0\delta_{ij}\delta_{rs}, \quad \hat{D}^1_{ijrs}(p) = 2\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{G}_i(p)}{p+1/\tau_i}\}\delta_{ri}\delta_{sj} + \{\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\lambda}_i(p)}{p+1/\tau_i}\}\delta_{ij}\delta_{rs}$$

局所系における特性関数を

$$\hat{u}_i^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},p) = -\hat{\chi}_i^{kl}(\boldsymbol{y},p)\frac{\partial \hat{u}_k^0}{\partial x_l} + C_i(\boldsymbol{x})$$

と定義すると、ユニットセルにおける微視問題が以下のように求まる。

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\{[D^0_{ijrs}(\boldsymbol{y}) + p\hat{D}^1_{ijrs}(\boldsymbol{y};p)](\delta_{rk}\delta_{sl} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l})\} = 0 \qquad (8)$$

$O(\varepsilon^0)$ 項 (巨視問題): 式 (5) のε^0項にユニットセルに対する平均化 $\langle \bullet \rangle = \int_Y \bullet \, dy/|Y|$ を施すとつぎの巨視問題が得られる。

$$\frac{\partial \langle \hat{\sigma}^1_{ij} \rangle}{\partial x_j} + \langle \hat{f}_i \rangle = 0; \qquad \langle \hat{\sigma}^1_{ij} \rangle = \hat{M}^h_{ijrs}\hat{\varepsilon}^{0x}_{rs}(p), \qquad \hat{M}^h_{ijkl} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \hat{M}_{ijrs}[\delta_{rk}\delta_{ls} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}]dy \qquad (9)$$

参考文献

1) Sanchez-Palencia, E. (1980), *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer-Verlag, Paris.
2) Schapery, R.A. (1961), "Approximate method of transform inversion for viscoelastic stress analysis," *Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Applied Mech.*, 1075-1085.

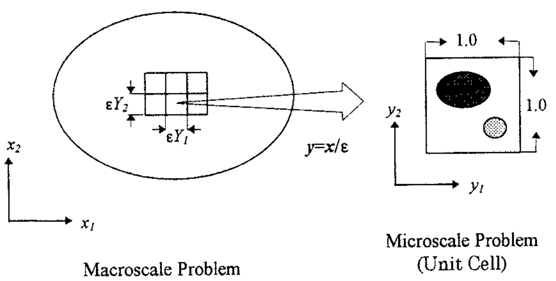

Figure 1. Material body with a periodic microstructure.

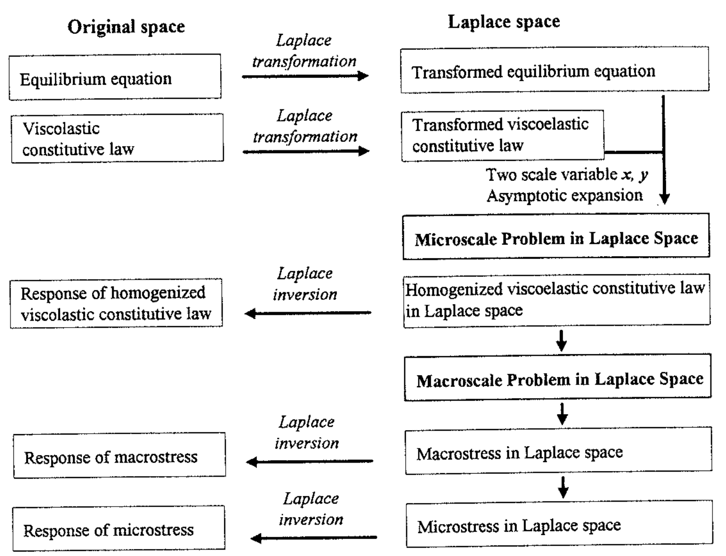

Figure 2. Scheme of homogenization analysis for viscoelastic problem.