

東洋大学工学部環境建設学科 正会員 浅井貞重

1. まえがき

現在、コンクリートの引張強さを実験で求めるには、直接引張試験方法に依るよりも、JISに制定されている間接的の試験方法、すなわち割裂引張試験方法(JIS A1113 コンクリートの引張強度試験方法¹⁾)による場合が多いようである。それは万人の研究者および設計者が、割裂引張試験方法には直接引張試験方法にない優れた点が多々あるのと、実用上においては、この方法で求めた値を使っても何ら支障を生じないということ、多くの実験および経験として得ているからであろう。また、そうであるからJISに制定されたのかも知れない。何れにしても、そのようにしてできた規格に対しては異論はない。

しかし、そのときに使用している引張強さの理論式 $\sigma_t = 2P/\pi d l$ の整合性については、何の説明もなく正統付けて載っているのには牽引付合の念を禁じ得ない。そこで、その研究をした。

2. 割裂引張試験方法

上述の σ_t の式は理論式であるので、図1において、この式が成立する荷重状態、すなわち P が無小の場合につき考えることにする。したがって、 P が無小なのに、どうして割裂ができるのか、などの疑問が生じるが、ここでは理論式の特性のみを検討するに止める。

こ存じの通り、厚さ l の円板の直径方向に一方の圧縮力 P が働いたとき、円板内の任意の一点における σ_x (σ_y と τ_{xy} の式は紙面の都合上省略する)の式を図1の極座標系(r_1, θ_1), (r_2, θ_2)につき表すと、

$$\sigma_x = \frac{-2P}{\pi l} \left\{ \frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta_1}{r_1} + \frac{\cos \theta_2 \sin^2 \theta_2}{r_2} - \frac{1}{d} \right\} \quad (1)$$

である²⁾。式(1)では分かりにくいので、

$$\sin \theta_1 = x/r_1, \cos \theta_1 = (r-y)/r_1, r_1^2 = x^2 + (r-y)^2, \sin \theta_2 = x/r_2, \cos \theta_2 = (r+y)/r_2, r_2^2 = x^2 + (r+y)^2 \quad \dots \dots (2)$$

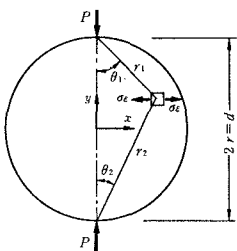


図1 座標系

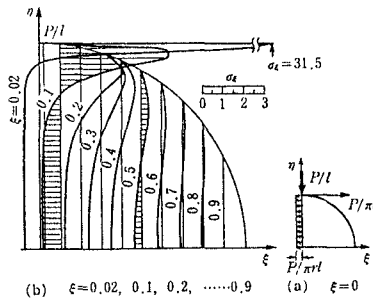


図2 $\sigma_x(\xi, \eta)$ の取束性⁵⁾

を代入して直角座標系とし、更に

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x}{P/\pi r l}, \quad \xi = x/r, \quad \eta = y/r \quad (3)$$

を代入して、無次元式として纏めると、式(1)は

$$\sigma_\xi = 1 - \frac{2(1-\eta)\xi^2}{\{\xi^2+(1-\eta)^2\}^2} - \frac{2(1+\eta)\xi^2}{\{\xi^2+(1+\eta)^2\}^2} \quad (4)$$

となる。この式(4)に $\xi=0$ を代入すると

$$\sigma_\xi = 1, \quad \therefore \sigma_x = P/(\pi r l) = \text{const.} \quad (5)$$

となるが、 ξ 軸上では $\sigma_x = \sigma_1 = \sigma_t$ と書けるので、式(5)は $\sigma_t = 2P/\pi d l$ となり、第1章で述べた式が得られる。以上がJISに載っている σ_t の式の所以であろう。

3. 荷重点の応力

前章の式(5)は上下の荷重点を除いた場合である。もし上の荷重点($\xi=0, \eta=1$)につき、式(4)を考えると、 ε を微小量として、

$$\xi \rightarrow \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1-\eta) \rightarrow \varepsilon \rightarrow 0 \quad (6)$$

を考えなければならない。すると式(4)の右辺は第2項より

$$\lim_{(1-\eta) \rightarrow \varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\xi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^4} = -\infty \quad (7)$$

となる。すなわち荷重点には無限大の圧縮応力が生じていることになる。また、ここには集中力 P が y 方向に働いているから、 $\sigma_y = -\infty$ である。したがって荷重点は、あらゆる方向の剪断応力は零となり、主応力方向は定まらず特異点となる。以上は周知のことである。

4. 荷重方向に対して垂直方向の力

外力は y 方向に垂直力 P のみしか作用していないから、 $x=x$ 断面に於ける x 方向の力は当然、零でなければならない。しかるに式(5)は、 σ_x に断面積 $d l$ を掛けた $2P/\pi$ なる引張力が、 $x=0$ の断面に作用している事を示しているので、明らかに矛盾する。この矛盾を埋めるのが式(7)である。

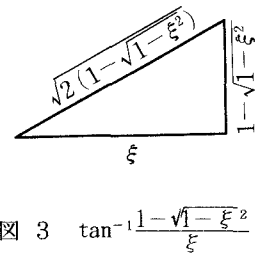


図3 $\tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ を構成する三角形

すなわち、式(7)の $-\infty$ は任意の集中圧縮力を意味しているが、その大きさは、上下の載荷点において x 方向の力の釣合条件を満足するように求めれば $-P/\pi$ となる。換言すれば、試験断面には式(5)の一樣応力と、載荷点には非常に大きな圧縮力 $-P/\pi$ が働いて釣合うことになる³⁾。これを図1の第1象限につき図示すれば図2(a)のようになる。この集中応力については無視している本が多い。そこで式(4)の σ_ξ の分布を視覚に訴えると、 $\xi = \xi$ 断面における σ_ξ の分布は、図2(b)のようになり^{4, 5)}、 σ_ξ の最大値は載荷点の近傍において激増し、 $\xi = 0$ では無限大となるのが関数の連続性より分かる。一方、 ξ が1に近づくると σ_ξ の分布は次第に消滅し、目測でも $\xi = \text{const.}$ の断面においては大体、

$$\int_0^{\eta_0} \sigma_\xi(\text{const.}, \eta) d\eta = 0 \quad (8)$$

となることが分かる。ただし、 η_0 は η の境界値である。そこで式(8)を更に確かなものにするため、式(8)に積法を適用すると、

$$I = \int_0^{\eta_0} \sigma_\xi d\eta = \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \left\{ 1 - \frac{2(1-\eta)\xi^2}{\xi^2 + (1-\eta)^2} - \frac{2(1+\eta)\xi^2}{\xi^2 + (1+\eta)^2} \right\} d\eta \\ = I_1 - I_2 - I_3 \quad (9)$$

となる。ただし式(9)において

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\eta = \sqrt{1-\xi^2} \quad (10)$$

であり、 I_2 は、

$$I_2 = 2\xi^2 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1-\eta}{\xi^2 + (1-\eta)^2} d\eta$$

で $1-\eta = \xi \tan x$ とおくと $x = \tan^{-1} \frac{1-\eta}{\xi}$ となるから積分の上限と下限を、それぞれ ξ_u, ξ_l とおくと、

$$\xi_u = \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}, \quad \xi_l = \tan^{-1} \frac{1}{\xi}$$

となり、

$$I_2 = 2\xi^2 \int_{\xi_l}^{\xi_u} \frac{\xi \tan x \cdot (-\xi \sec^2 x)}{\xi^4 (1+\tan^2 x)^2} d x$$

となる。しかるに被積分関数は、

$$\frac{\tan x \cdot \sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^2} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{(1/\cos^2 x)^2} = \sin x \cdot \cos x$$

となるから、

$$I_2 = -2 \int_{\xi_l}^{\xi_u} \sin x \cdot \cos x \cdot d x = - \int_{\xi_l}^{\xi_u} \sin 2x \cdot d x$$

$$= - \frac{1}{2} \left[\cos 2 \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} - \cos 2 \tan^{-1} \frac{1}{\xi} \right] \quad (11)$$

となる。次に I_3 も I_2 と同様にして、

$$I_3 = 2\xi^2 \int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{1+\eta}{\xi^2 + (1+\eta)^2} d\eta$$

$$= - \frac{1}{2} \left[\cos 2 \tan^{-1} \frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} - \cos 2 \tan^{-1} \frac{1}{\xi} \right] \quad (12)$$

となる。ゆえに I は式(10), (11), (12)より、

$$I = \sqrt{1-\xi^2} - \frac{1}{2} \left[\cos 2 \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} - \cos 2 \tan^{-1} \frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right] \quad (13)$$

となる。ここで式(13)の [] 内の第1項は

$$\cos 2 \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \cos^2 \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} - \sin^2 \tan^{-1} \frac{1-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \quad (14)$$

となるから、式(14)の右辺の \tan^{-1} の角度を図3のように示せば、斜辺長は $\sqrt{2(1-\sqrt{1-\xi^2})}$ となるから、式(14)の右辺は、

$$\frac{\xi^2 - (1-\sqrt{1-\xi^2})^2}{2(1-\sqrt{1-\xi^2})} = \sqrt{1-\xi^2} \quad (15)$$

となる。同様に式(13)の [] 内の第2項は、

$$\cos 2 \tan^{-1} \frac{1+\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = -\sqrt{1-\xi^2} \quad (16)$$

となるので、結局、式(13)は、

$$I = \sqrt{1-\xi^2} - \frac{1}{2} \left[\sqrt{1-\xi^2} - (-\sqrt{1-\xi^2}) \right] = 0 \quad (17)$$

となる。したがって、当然のことであるが $x = x$ 断面における x 方向の力は零となり、水平方向の力の境界条件、式(8)を満足する。

以上は、学生相手の演習問題の解答みたいで恐縮ですが、式(7)を考えることにより、 x 方向の力の釣合条件を満足するのが解析的に証明できた。

5. 結論

割裂引張試験方法の供試体の $\xi = \xi$ 断面における横方向力は、零となることは明らかである(すなわち、式(8)が成立すること)。しかし、それを解析的に明示した報告は見当たらない。かかる問題につき、著者は前掲の研究⁴⁻⁵⁾において、それを求めたが紙面の都合上、記載することはできなかった。そこで、ここでは、その解析解を得る過程を示し、以下の結論を得た。

- 1) 載荷点には無限大の σ_ξ が働き特異点となる。
- 2) 横方向力は理論的に零となることを示した。
- 3) 割裂引張試験方法による破壊は、剪断応力や土楔現象も大きく影響すると考えられる⁵⁾。

[参考文献]

- 1) 日本規格協会：コンクリートの引張試験方法、JISハンドブック(土木・建築)、日本規格協会、77、(1971)。
- 2) たとえば 倉西正嗣：弾性学、文献社、349、(1970)。
- 3) 森口繁一：2次元弾性論(岩波講座 現代応用数学)、岩波書店、40-41、(1967)。
- 4) 浅井貞重：ちょっと気になること[読者コーナー]、コンクリート工学、Vol. 25、No. 4、p. 84、(1987)。
- 5) 浅井貞重：割裂引張試験方法についての考察、コンクリート工学年次論文集、Vol. 15、No. 1、pp. 447-452、(1993)。