

CS-13

成長する欠陥に対する周期構造モデルの群論による分岐解析

○東京大学 学生員 小国健二
 東京大学 正 員 堀 宗朗
 東京大学 学生員 後藤寛英

1. まえがき

砂や粘土のずれせん断におけるリーデル線の発生¹⁾から中部日本の活断層の入れ子構造等に見られるように、亀裂等の欠陥の発生や成長には共通した特定のパターンがある。これらの現象の解析において分岐経路の特定には困難が伴う。本研究ではこのような現象を統一的に解明するために材料内の欠陥を周期構造としてモデル化し、群論を適用してその成長の分岐解析を行う。なお、本研究では簡単な欠陥の例として平面内のクラックを考えるが、本研究で得られた結果は空隙、相変化等の欠陥にも直接適用が可能である。

2. 問題の設定

図1に示すような等間隔 d で並ぶ長さ a のクラックの周期構造を考える。外力をパラメーター σ で表す。対称性により各クラックは全く同じ長さで成長するが、ある外力の時に成長のパターンが異なることがある。そこで仮に周期的なパターンで一様な成長以外の成長が起ると仮定する。すなわち N 個のクラックを含む領域を新たなセルとし、各クラックの進展の仕方が異なる場合を想定する。セル内の i 番目のクラックの長さを a_i 、応力拡大係数を K_i とする。($i = 1, 2, \dots, N$) 材料の破壊靱性を K_c とおくと、破壊基準は $K_i = K_c$ であり、荷重の増加 $d\sigma$ に対しこのクラックの進展に関して形式的に次の関係が得られる。

$$dK_i = \partial K_i / \partial \sigma d\sigma + \partial K_i / \partial a_j da_j = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $K_i = K_i(a_1, a_2, \dots, a_N, \sigma)$ である。 $\partial K_i / \partial \sigma d\sigma$ の物理的意味は外力の変化による i 番目のクラックの応力拡大係数の変化量であり、周期構造であるため $\partial K_i / \partial \sigma d\sigma = \text{const}$ と i によらない一定値をとる。また $\partial K_i / \partial a_j$ は j 番目のクラックの長さの変化が i 番目のクラックの応力拡大係数に及ぼす影響を表したものである。クラック間の相互作用はクラックの距離により決定されることを考えると、 $\partial K_i / \partial a_j$ はクラック間の距離 $\min\{|i-j|d, (N-|i-j|)d\}$ と単位セルに含まれる小セル数 N により決定される関数とみなすことができる。したがって、 $\min\{|i-j|, (N-|i-j|)\} = l$ とおくと $\partial K_i / \partial a_j = J_{ij} = J_l^{(N)}$ と書ける。(図2に J_{ij} を行列表示する。) さらに $J_l^{(N)}$ を $1/(ld)$ の冪級数で展開することができると仮定した場合、 $ld \gg 1$ のとき、 $J_l^{(N)}$ を $J_l^{(N)} = \sum_{m=0}^{\infty} R_m^{(N)} (1/(ld))^m$ の形で表すことにする。2次元クラックの場合この冪級数はクラック問題の Green 関数より $m = 2$ から始まることになる。したがって、 J_{ij} の成分をクラック間隔 d の関数として以下のように表すことができる。

$$J_{ij} = J_i^{(N)} \begin{cases} R_0^{(N)} & \text{for } i = j \\ \sum_{m=2}^{\infty} R_m^{(N)} 1/(ld)^m & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

クラックが大きくなり相対的な距離が小さくなると上記の冪級数は収束しなくなるため J_{ij} を上のような冪級数に展開することは不可能となる。

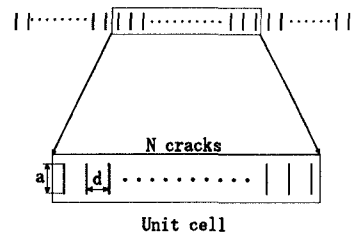


図1 クラックの周期構造モデル

$$\begin{matrix} J_0^{(N)} J_1^{(N)} J_2^{(N)} \dots J_{N/2-1}^{(N)} \dots J_2^{(N)} J_1^{(N)} \\ J_1^{(N)} J_0^{(N)} \dots \dots \dots J_2^{(N)} \\ J_2^{(N)} \dots \dots \dots \vdots \\ \vdots \dots \dots J_{N/2-1}^{(N)} \\ J_{N/2-1}^{(N)} \dots \dots \vdots \\ \vdots \dots \dots \vdots \\ J_2^{(N)} \dots \dots J_1^{(N)} \\ J_1^{(N)} J_2^{(N)} \dots J_{N/2-1}^{(N)} \dots J_1^{(N)} J_0^{(N)} \end{matrix}$$

図2 Matrix Form

3. 群論を用いた係数行列のブロック対角化と分岐解の特定

クラックの長さの変化を $\mathbf{da} = (da_1, da_2, \dots, da_N)$ とすると、 $\det[\mathbf{J}] \neq 0$ のときは式 (1) からただちに $\mathbf{da} = da_1(1, \dots, 1)$ となる。一方 $\det[\mathbf{J}] = 0$ のときには分岐解が発生する。この分岐解は、 $\mathbf{J}$ の固有値と固有ベクトルから求めることができる。ここではセルが D_N 不変な系であることに着目して群論を適用し、固有値と固有ベクトルを求める。 D_N 不変な系の係数行列の固有ベクトルは D_N の既約表現に対応して与えられ、 $N = \text{even}$ のとき ($N = \text{odd}$ の場合にも、このセルを2個つなげたものを新たな単位セルとみることで、 $N = \text{even}$ の場合と同じ議論が適用される) 分岐解に対する固有ベクトルは D_N の1次既約表現、2次既約表現に対応して、 $\mathbf{h}_{\frac{N}{2}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \cos \pi k \right\}$, $\{\mathbf{h}_{j+}, \mathbf{h}_{j-}\} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{\pi j(2k-1)}{N}, \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{\pi j(2k-1)}{N} \right\}$ ($k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \frac{N}{2}-1$) と表される。これらの固有ベクトルと主経路に対する固有ベクトルより生成される行列 $\mathbf{H}$ を用いて、 $\mathbf{J}$ を $\mathbf{H}^t \mathbf{J} \mathbf{H} = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_{(\frac{N}{2}-1)}, \lambda_{(\frac{N}{2}-1)}, \lambda_{\frac{N}{2}}, \lambda_N]$ と対角化できる。このとき、分岐解に対する固有値は以下のように表される。

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^N J_{1k} \cos \frac{2\pi j}{N}(k-1) = R_0^{(N)} + J_{\frac{N}{2}}^{(N)} \cos \pi j + 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} J_k^{(N)} \cos \frac{2\pi j}{N} k \quad (\text{for } N \text{ even}) \dots\dots\dots (3)$$

証明は割愛するが任意の $j \leq \frac{N}{2}-1$ について $\lambda_j > \lambda_{\frac{N}{2}}$ である。よって $\lambda_{\frac{N}{2}}$ 以外の固有値が0となるまでには既に $\lambda_{\frac{N}{2}} < 0$ となる。したがって $\lambda_{\frac{N}{2}}$ に対応するモードは不安定となり、最初分岐モードにはこの不安定な $\lambda_{\frac{N}{2}}$ に対応する固有ベクトル $(-1, +1, \dots, -1, +1)$ が現れる。主経路の解の基底が $(1, 1, \dots, 1, 1)$ であるから、この分岐モードは結果として $\mathbf{da} = da(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ というように1つおきにクラックが成長するモードになる。

成長したクラックとその隣の不活性化したクラックを1つの小セルとみなすことも可能である。この場合、群の表現は不変であるということに着目すると、ここまでの議論において1つのクラック長 a_i を隣り合う2つのクラック長のベクトルに拡張できる。したがって、式 (2) と同様の展開が許される限り、次に発生する分岐は活性化した小セルと不活性化した小セルが1つおきに並ぶというモードであることが結論される。(図3)

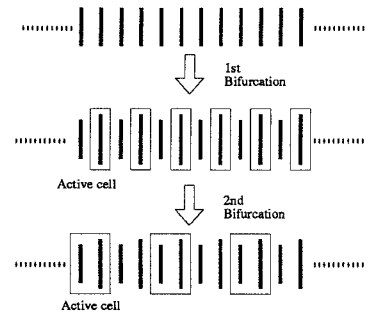


図3 分岐モード

4. 結論および現象との比較

ここまでの議論と式 (2) のような相対距離の冪級数に係数を展開出来ない場合を考慮すると最終的に、『規則的に欠陥等が配置された周期構造モデルにおいて、欠陥の自己発展における分岐現象は、1つおきの自己発展か、あるいは周期性を失った自己発展の2つのパターンに限定される』という結論が得られる。

現象との比較のために筆者らがリーデル線発生モデル実験として行ったゼラチンのねじりせん断試験において、初期に発生した微小な亀裂が選択的に成長するという観察結果が得られた。よって、このような現象は本研究のような手法で解析することが可能である。また、あわせて行ったカオリンを用いた実験においても同様の観察結果が得られたことより本研究で得られた結果は材料によらない一般的事実を記述しているといえる。

参考文献

- 1) 後藤 寛英：円盤状粘土のねじりせん断試験によるリーデル線発生観察（東京大学卒業論文 1995）
- 2) 池田 清宏, 中沢 正利, 和知 聡：長方形板の分岐階層構造の境界条件による退化（土木学会論文集 No.507/ I-30, 65-75, 1995.1）