CS-11

動的定式化による飽和砂均一変形の安定性の条件

○東北学院大学工学部　飛田善雄
佐藤工業（株）中央技研　吉田望

１．はじめに

地盤材料の多くは，法線則をもつスタンダード材料（狭義には，関連流動則）ではなく，非関連性や増分非線形性をもつノンスタンダード材料として，構成モデルを定式化したほうが，様々な変形挙動をより簡便に統一的に表現できる．しかし，変形挙動をよく表現できるという利点の代償として，支配方程式系の簡潔な数学的構造は失われ，解の唯一性や安定性の議論が難しくなる．以下，微小変位に議論を限定する．

地盤力学では，Druckerの安定性の条件（tr($\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^p$)>0 と記述される；tr($\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}^p$)=$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}$,ここで繰り返し指標に関する総和規約を用いる;上付きドットは速度に関する量を表す）が用いられることが多いが，実験事実を詳細に検討すると，この条件では安定性の議論は十分ではないことが知られている．このため，Lade and Pradel(1990) は実験結果を総括して，Drucker あるいはHill の安定条件（tr($\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}$)>0 ;$\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}^e+\dot{\varepsilon}^p$）と共に，排水条件，飽和度の程度，ダイレイタンシーの傾向も合わせて，安定性の条件を考えることが，砂のような材料の場合には必要であることを示した．しかし，Ladeの結果は，一般的な安定性の議論の範疇にはなく，その力学的な意味はあいまいになっている．この問題を動的定式化より出発して，Ladeの独特な安定性条件の力学的な意味づけを行なうことが本文の目的である．

２．構成モデルの非対称性とHill の安定性

本文では，Drucker の安定性の条件ではなく，より広いHill の安定性の条件を対象とする．接線弾性テンソルが正定値性（tr($\dot{\varepsilon}E^e\dot{\varepsilon}$)>0 がいかなる$\dot{\varepsilon}$ に対しても成立する性質）を持つとき，Drucker の条件はHill の条件に対して十分条件になっている．

Hill の安定性の条件は，次の様なプロセスを経て得られる（例えば，Hill, 1978）．材料の本質的な安定性を議論するために，まず非保存外力を考察の対象からはずす．次に，弾塑性挙動のうち，塑性状態のみを対象にして（弾性除荷は無視する），線形比較体を導入している．この線形比較体を $\dot{\sigma}_{ij}=L_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$ ($\dot{\sigma}$= L:$\dot{\varepsilon}$ と略記する）．$L_{ijkl}=L_{klij}$ (L=L^T, T は転置を表す．）の対称性が成立するものとして、ポテンシャル関数U($\dot{\sigma}_{ij}=\partial U/\partial\dot{\varepsilon}_{ij}$) を導入している．さらに仮想変位による内部エネルギーの増加が外力によるエネルギー増加よりも大きい（すなわち，正の値を持つべき運動エネルギーが負となる）ことが安定性の条件であるとして，最終的に，微小変位の範囲では tr($\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}$)>0という条件が導かれる．上記プロセスのうち，非関連流動則に基づく弾塑性モデルでは，L=L^Tの対称性は成立しないので，ポテンシャル関数を導入することはできず，従ってエネルギー的な量のみでは，ある与えられた静的平衡の安定性を議論することはできない．しかし，もし最初に接線弾塑性テンソル L を対象化した仮想的な線形増分材料：$\dot{\sigma}=L^s$:$\dot{\varepsilon}$; L^s=(L + L^T)/2, を導入すれば，Hill の議論の範疇に属することになる．このとき，tr($\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}$)=tr($\dot{\varepsilon}L\dot{\varepsilon}$) と記述でき，さらに反対称成分$L^a$:$L^a$=(L - L^T)/2は２次形式では，何の役割も果たさず，tr($\dot{\varepsilon}L\dot{\varepsilon}$)=tr($\dot{\varepsilon}L^s\dot{\varepsilon}$)が成立することを考えると，対称化した$L^s$の最小固有値が正であること（tr($\dot{\varepsilon}L^s\dot{\varepsilon}$)>0 が全ての$\dot{\varepsilon}$に対して成立する必要十分条件）とHill の安定性の条件（tr($\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}$)>0）が等価なことが解かる（この性質を後で利用する）．

このような対称化した仮想的線形増分材料に対する安定性の条件は，一般に安定性の条件としては下限値を与えるものと思われる．非関連流動モデル，二重すべりモデルに関して，実際に対称化されたL^sに対して安定計算を行なってみると，パラメータの変動に対して極めて敏感で，塑性変形開始と同時に（地盤材料では，弾性域はないものとされることが多いので，変形開始と同時に）不安定となる場合もある（飛田，1994）．つまり，対称化された仮想的線形増分材料に対する安定性（Hillの安定性とも言えよう）は，実際の挙動と比較すると，あまりにも低い値を与え，実際の役には立たないことが懸念される．

３．動的定式化による飽和砂の安定性

２節の議論より，Hill の安定性の条件を利用する代わりに，動的定式化に基づく安定性の可能性をLade (1994)の総括報告による安定性の条件との対応性を考えて，以下の条件に限定して議論する：（１）３軸圧縮応力状態，（２）完全排水・非排水条件（３）均一変形の安定性.

Molenkamp(1989, 1991)により一般的な応力状態での均一変形に対する定式化が示されているので，これを利用する．対象とした弾塑性モデルは，簡単な等方非関連流動モデルである．排水変形時（あるいは，有効応力σ'(σ'=σ-u1; 1=δ_{ij}, δ_{ij}はKroneckerのデルタ)による表現は次の形となる．ここで，応力/変形成分は次のような３軸応力状態に便利な量を用いる：

$q=\sigma_1-\sigma_3$, $p=-(\sigma_1+2\sigma_3)/3$, $\gamma=2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)/3$, $v=(\varepsilon_1+2\varepsilon_3)$ の量を用いる（$q\dot{\gamma}-p\dot{v}$=tr($\dot{\sigma}\dot{\varepsilon}$)が成立している；また，引っ張り

応力，伸びひずみを正としている）．

弾性成分：$\dot{q} = 3G\gamma^e$, $-p = Kv^e$ ....(1)

塑性成分：$\dot{\gamma}^p = \frac{1}{h}\frac{\partial g}{\partial q}\hat{f}$, $\quad \dot{v}^p = \frac{1}{h}\frac{\partial g}{\partial p}\hat{f}$; .....(2)

$$g = q - \beta p' = 0, \quad f = q - \mu p' = 0,$$
$$\hat{f} = (\partial f / \partial q)\dot{q} + (\partial f / \partial p)\dot{p}$$

さらに，間隙水に対して，次の式を考える．

$-\dot{p}' = \dot{u} = (K_w / n)\dot{v}^w$ .... (3)

ここに，n は間隙率である．式(1),(2),(3)および有効応力の原理を利用して，接線剛性マトリックスを求めると，次式となる．

$$\begin{Bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}3G - (3G)^2 / h^*, & -3GK\mu / h^* \\ 3GK\beta / h^*, & -(K + [K_w / n] - K^2\mu\beta / h^*)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\gamma}\\ \dot{v}\end{Bmatrix}$$
........................(4)

ここに，$h^*=h+h_c$; $h_c=3G-K\mu\beta$ である．[A]=0, 排水時, [A]=A, 非排水時という便宜的な約束を用いる．Molenkamp(1989)によれば，均一変形に対する動的定式化に基づく安定性の消失は，式（４）の構成マトリックスの最小固有値により，次のように決定される：

（１）最小固有値が実数で，０または負となる条件
（２）最小固有値が共役複素数となる条件

（２）による不安定性は，フラッター型の不安定として知られている．（１）の条件は，ここでの議論の場合には，det[L]=0 と等しいことが容易に導ける．

排水条件では，（２）型の条件が最初に発生する．しかし，フラッター型の不安定性は，弾性除荷の存在，間隙水の粘性などの，安定解析では考慮されない散逸メカニズムにより，その発生は押さえられるものと考えられる．このとき，排水変形の安定性は（１）の条件により与えられる．（４）式において$[K_W/n]=0$ の時のdet[L]=0は，h=0 の条件（すなわち，ピーク時）で起こることが知られているので（Runesson and Mroz, 1989)，排水時には，ピーク時まで安定性が保たれることになる．すなわち，$tr(\sigma\varepsilon)<0$ となっても，フラッター型の不安定性が現実には起こらないとすれば，安定性は保証されることになる．これは，実験結果：排水時には，ピーク時まで不安定な兆候は見られないと一致する結論となる．

非排水の場合には，(K_W/n)が，KやGと比較して，大きい値を持つことが重要になる．（４）式の最小固有値を実際に求め，nK/K_W, $3nG/K_W$の様な項を無視して整理すると，最小固有値が正の条件は，塑性硬化係数h に対して，

$h > -K\mu\beta$ ....(5)

と求まる．ダイレイタンシーを表現するβが負（即ち，せん断時に圧縮する）の時には，h>0 で安定性が失われることになる．（４）式の非対称なマトリックスを予め対称化して，その最小固有値の表現に対して，同じ仮定を用いて，安定性の条件を求めると，同じく（５）式になる（（５）式は，v=0, qγ >0としても得られる式である. Vardoulakis, 1988）．先に述べた様に，対称化した仮想的材料の安定性がHill の安定性の条件と同一であるから，非排水時には近似的にHill の安定性の条件で安定性が表現でき（$\varepsilon^p>>\varepsilon^e$ という条件のもとで，ほぼDruckerの条件と等しい），しかも負のダイレイタンシーの場合には，h>0 で不安定変形が生じることを予測している．この結果は，Lade and Pradel (1990)の実験結果「非排水時の不安定挙動の発生はほぼDruckerの安定性の消失で判定でき，飽和度の低い場合，部分排水の場合などは，ピークに近いところまで安定性が保たれる．正のダイレイタンシーを示す場合には，ひずみ軟化（h<0）が必要となる」に一致する結果である．飽和度の低い時，部分排水の時には，（４）式で対象とすべき，見かけのK_Wの値は小さくなり，前述の仮定は成立しなくなり，フラッター型の不安定性が現実的に発生しなければ，安定性は増加することになる．

４．結論

以上の議論より，Ladeらの実験結果は，均一変形に対する動的定式化に基づいた安定性の議論で，十分に説明できることが解かる．すなわち，動的定式化より出発すれば，砂の様な材料でも，特殊な付帯条件を与えることなく，力学的に合理的な形で安定性の議論が可能であることが示唆されたことになる．

引用文献

Hill, R. 1978. Aspects of invariance in solid mechanics, Advances in Applied Mechanics, 18: 1-75

Lade P.V., and Pradel,D.1990. Instability and plastic flows of soils . J. Engng. Mech. ASCE,116,11: 2532-2566

Lade, P. V. 1994. Instability of sand in the pre- failure hardening regime, Pre-print Volume of I.S. on Pre-failure deformation characteristics of geomaterials:117-148

Molenkamp, F. 1989. Liquefaction as an instability. Mechanics of Granular Materials Satake, M.(ed.) ISSMFE: 157-163

Molenkamp, F. 1991. Material instability for drained and undrained behavior: Parts 1, and 2, Int. J. Num. Anal. Methods in Geomech. 15: 147-180

Runesson, K. and Mroz, G.1989.A note on nonassociated plastic flow rules, Int. J. Plasticity,5: 639-658

飛田．1994. 砂の様な粒状体の構成式の安定性，地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム発表論文集，土質工学会，127-134

Vardoulakis, I.G.1988. Stability and bifurcation in geomechanics, Num. Methods in Geomech. Swoboda (ed.), Balkema :155-168,