CS－10　圧縮性変形場における Cam-clay モデルの分岐荷重解析解

金沢大学　正会員　○斎藤武久・矢富盟祥・石田　啓

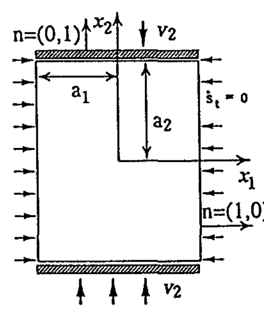
1.　はじめに

円柱粘土供試体を軸方向に圧縮した場合，ひずみの局所化，せん断帯の生成，破壊といった一連の遷移過程が生じる．この過程において見られる種々の供試体変形モードを分岐現象として捉え，著者らはこれまで有限変形弾塑性理論を用いて有限変形非共軸 Cam-clay モデル[1)]の分岐荷重と分岐モードの関係を理論的に考究してきた[2)3)]．その際，準静的な等体積変形を考え，供試体内の間隙水に流れはなく，供試体内のあらゆるエレメントが非圧縮性である場合を対象としている．

そこで，本研究では平面ひずみ，死荷重側方境界条件のもとで圧縮性変形場における有限変形非共軸 Cam-clay モデルの分岐荷重解析解を示す．ただし，圧縮性変形場とは粘土内における間隙水が圧力を受け持たないこと，あるいは，排水条件ではあるが土骨格と水のマイグレーションがないことを仮定する．

2.　解析方法および分岐荷重解析解

図–1に座標系を示すが，軸荷重は変位制御で拘束し，上下端において摩擦はないものとする．なお，平面ひずみ状態の場合，中間主応力$\sigma_3' = \frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{2}$を仮定すると平均有効応力は$p' = \frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{2}$となる．以後，応力差を$\bar{q} = \sigma_2' - \sigma_1'$で与え，分岐が生じる瞬間まで有効応力は一様であるとする．ただし，Cauchy 応力Tは引張りを正，有効応力$\sigma_i'(i = 1,2,3)$は土質工学の慣例に従い圧縮を正とする．



図–1　供試体モデルと座標系

分岐方程式　準静的な場合で物体力がない場合を考えると，分岐方程式は

$$div\dot{S}_t = o, \quad \begin{pmatrix} \dot{S}_{t11,1} + \dot{S}_{t12,2} = 0 \\ \dot{S}_{t21,1} + \dot{S}_{t22,2} = 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{上下面}\,(x_2 = \pm a_2) \ : \ v_2 = 0, \ \dot{s}_{t1} = 0 \\ \text{側　面}\,(x_1 = \pm a_1) \ : \ s_t = o, \ (\dot{s}_{t1} = 0, \ \dot{s}_{t2} = 0) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

となる．ここに，$\dot{S}_t$は全公称応力速度$\dot{S}_t = \dot{T} + T(trD) - TL^T$であり，$\dot{s}_t$は全公称表面応力速度$\dot{s}_t = \dot{S}_t n$である．なお，$L$は速度勾配，$D$は速度勾配の対称部分であるストレッチングを示す．

構成式　有限変形非共軸 Cam-clay モデルの構成式[1)]は共軸モデル

$$\overset{\circ}{T}_{ij} = \pounds_{ijkl}D_{kl}, \quad \pounds_{ijkl} = (\tilde{K} - \frac{2}{3}\tilde{G})\delta_{ij}\delta_{kl} + \tilde{G}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{(\frac{\tilde{G}}{\bar{\tau}}S_{ij} - \tilde{K}\bar{\beta}\delta_{ij})(\frac{\tilde{G}}{\bar{\tau}}S_{kl} - \tilde{K}\bar{\beta}\delta_{kl})}{\tilde{G} + \tilde{K}\bar{\beta}^2 + h} \quad \cdots (3)$$

に対して，次式の置き換えを行うことにより与えられる．なお，$\overset{\circ}{T}_{ij}$は Cauchy 応力の Jaumann rate を示す．

$$h \ \rightarrow \ \frac{h_1 h}{h_1 - h}, \qquad \bar{\beta} \ \rightarrow \ \frac{h_1\bar{\beta}}{h_1 - h}, \qquad \tilde{G} \ \rightarrow \ \frac{h_1\tilde{G}}{h_1 + \tilde{G}}, \qquad \tilde{K} \ \rightarrow \ \frac{(h_1 - h)\tilde{K}}{h_1 - h - \bar{\beta}^2\tilde{K}} \quad \cdots\cdots (4)$$

ここに，S_{ij}は偏差応力を示し，$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{1}{2}S \cdot S}$である．また，間隙比$e$，ポアソン比$\nu$および膨潤指数$\kappa$を用いて，弾性係数$\tilde{K}$および$\tilde{G}$はそれぞれ，$\tilde{K} = \frac{1+e}{\kappa}p' = \kappa_0 p'$，$\tilde{G} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}\frac{1+e}{\kappa}p' = G_0 p'$で表される．$h$および$h_1$は硬化係数および第二硬化係数であり，$h = \frac{p'\bar{\beta}}{\sqrt{3}D}$，$h_1 = \frac{p'\bar{\beta}}{\sqrt{3}A}\ (>0)$である．なお，$D$および$A$はダイレイタンシー係数および非共軸パラメータを示す．$\bar{\beta}$は限界応力比Mおよび有効応力比（分岐荷重）$\eta = \frac{q}{p'}$を用いて，$\bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(M - \eta)$で与えられる．ただし，$q = \sqrt{\frac{3}{2}S \cdot S}$であり，平面ひずみ条件の場合は応力差$\bar{q}$との間に，$\bar{q} = \frac{2}{\sqrt{3}}q$なる関係がある．構成式 (3) および (4) を式 (1) および式 (2) に代入することにより

$$d_1 v_{1,11} + d_3 v_{1,22} + (d_4 + d_7)v_{2,12} = 0, \quad d_5 v_{2,11} + d_2 v_{2,22} + (d_4 + d_8)v_{1,12} = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{上下面}\,(x_2=\pm a_2)\quad \dot{S}_{t12}=d_3v_{1,2}+d_4v_{2,1}=0, & \text{側　面}\,(x_1=\pm a_1)\quad \dot{S}_{t11}=d_1v_{1,1}+d_7v_{2,2}=0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \dot{S}_{t21}=d_4v_{1,2}+d_5v_{2,1}=0 \end{array}\right\} \quad (6)$$

に分岐方程式は変形される．ここに，係数 d_1 から d_8 はそれぞれ

$$\left.\begin{array}{l} d_1=[\kappa_0+\frac{4}{3}G_0-\frac{(G_0-\kappa_0(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2}{G_0+\kappa_0(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2+\frac{M-\eta}{3(D-A)}}]p', \quad d_2=[\kappa_0+\frac{4}{3}G_0-\frac{(G_0+\kappa_0(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2}{G_0+\kappa_0(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2+\frac{M-\eta}{3(D-A)}}]p' \\ d_3=[G_0-\frac{1}{\sqrt{3}}\eta]p', \quad d_4=[G_0+1]p', \quad d_5=[G_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\eta]p', \quad d_6=[G_0-1]p' \\ d_7=[\kappa_0-\frac{2}{3}G_0+\frac{G_0^2-\kappa_0^2(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2}{G_0+\kappa_0(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2+\frac{M-\eta}{3(D-A)}}-1+\frac{1}{\sqrt{3}}\eta]p' \\ d_8=[\kappa_0-\frac{2}{3}G_0+\frac{G_0^2-\kappa_0^2(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2}{G_0+\kappa_0(\frac{D(M-\eta)}{\sqrt{3}(D-A)})^2+\frac{M-\eta}{3(D-A)}}-1-\frac{1}{\sqrt{3}}\eta]p' \end{array}\right\} \cdots (7)$$

となる．ここで，速度場を次式により仮定する[4)5)]．

$$v_1(x_1,x_2)=V_1(x_1)\cos\gamma x_2 \quad v_2(x_1,x_2)=V_2(x_1)\sin\gamma x_2 \quad \cdots\cdots (8)$$

このとき，係数 γ を分岐モード数 m を用いて，$\gamma=m\frac{\pi}{2a_2}$，$m=1,2,3\cdots$ とおくと，式 (2) 中における上下面境界条件は満たされる．ただし，m が奇数のときに x_2 軸の座標原点を $\frac{a_2}{m}$ だけ移動しなければならない．さらに，式 (8) において次式を仮定し

$$V_1(x_1)=H\exp(i\alpha x_1), \quad V_2(x_1)=R\exp(i\alpha x_1) \quad (i=\sqrt{-1}) \cdots\cdots (9)$$

式 (5) に代入し，非自明な H および R が存在する条件として分岐荷重を求める特性方程式が導かれる．

<u>EC 領域における分岐荷重解析解</u>　上述の特性方程式は実数解の存在個数に対応して 4 つの領域に判別されるが，ここでは，紙面の都合上，4 つの複素数解を持つ EC（elliptic complex）領域の分岐解を示す．特性方程式の複素数解においてその実数部および虚数部をそれぞれ Q および iP で表すと式 (8) および式 (9) より，対称および非対称変形モードを与える $V_1(x_1)$ および $V_2(x_2)$ は次式となる．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{対称変形モード} & V_1=H_1\sinh(\gamma Px_1)\cos(\gamma Qx_1)+R_1\cosh(\gamma Px_1)\sin(\gamma Qx_1) \\ & V_2=H_2\cosh(\gamma Px_1)\cos(\gamma Qx_1)+R_2\sinh(\gamma Px_1)\sin(\gamma Qx_1) \\ \text{非対称変形モード} & V_1=H_1\cosh(\gamma Px_1)\cos(\gamma Qx_1)+R_1\sinh(\gamma Px_1)\sin(\gamma Qx_1) \\ & V_2=H_2\sinh(\gamma Px_1)\cos(\gamma Qx_1)+R_2\cosh(\gamma Px_1)\sin(\gamma Qx_1) \end{array}\right\} \cdots\cdots (10)$$

対称および非対称変形モードに対する分岐解は式 (10) を式 (5) および式 (6) の側面境界条件に代入し，非自明な H_1，H_2，R_1 および R_2 が存在する条件としてそれぞれ次式のように導かれる．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{対称変形モード} & \frac{P\sin(Qma_1/a_2\pi)}{Q\sinh(Pma_1/a_2\pi)}=-\frac{d_3(d_7d_8-d_1d_2)+d_1(d_4^2-d_3d_5)\sqrt{\frac{d_2d_3}{d_1d_5}}}{d_3(d_7d_8-d_1d_2)-d_1(d_4^2-d_3d_5)\sqrt{\frac{d_2d_3}{d_1d_5}}} \\ \text{非対称変形モード} & \frac{P\sin(Qma_1/a_2\pi)}{Q\sinh(Pma_1/a_2\pi)}=\frac{d_3(d_7d_8-d_1d_2)+d_1(d_4^2-d_3d_5)\sqrt{\frac{d_2d_3}{d_1d_5}}}{d_3(d_7d_8-d_1d_2)-d_1(d_4^2-d_3d_5)\sqrt{\frac{d_2d_3}{d_1d_5}}} \end{array}\right\} \cdots\cdots (11)$$

ここに，P および Q は

$$P=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_2d_3}{d_1d_5}}+\frac{1}{4}\frac{d_1d_2+d_3d_5-(d_4+d_7)(d_4+d_8)}{d_1d_5}}, \quad Q=\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_2d_3}{d_1d_5}}-\frac{1}{4}\frac{d_1d_2+d_3d_5-(d_4+d_7)(d_4+d_8)}{d_1d_5}} \cdots\cdots (12)$$

である．最終的に式 (11) は供試体寸法比 $\frac{a_1}{a_2}$，分岐モード数 m，分岐荷重 η および非共軸パラメータ A からなる陰関数式であり，これにより，分岐荷重解析解が得られる．なお，結果の詳細および考察は当日発表する．

参考文献

1) C.Yatomi et. al.,*Soils and Foundations*, Vol.29, No.3,1989.
2) 加藤・矢富・石田, 土木学会第 48 回年次学術講演会講演概要集, 第 *III* 部,1993.
3) 斎藤・矢富・石田・志比, 地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム発表論文集,1994.
4) R.Hill and W.Hutchinson,*Mech.Phys.Solids*, Vol.23, 1975.
5) J.B.Bardet,*J. Applied Mech.*,Vol.58,1991.