

1. はじめに

近年コンピューター機器の高性能低価格化によって、CADが広く利用されるようになってきた。中でも2次元CADは、パーソナルコンピューターでも使用できるものが市販されており、その利用が一般化しつつある。土木分野においてもCADを有効に利用することは非常に効果的であり、現在、その活用が望まれているところである¹⁾。今回、CADを用いた土量計算について、2次元CAD上に描かれた掘削または盛土の平面図に Gauss 発散定理²⁾を適用すると、効率的に体積が計算できることが判明したので、以下それらについて報告する。

2. 計算式

Gauss 発散定理は、曲面 S とそれに囲まれた凸領域 V において定義された、微分可能な関数 $A(x_1, x_2, x_3)$ について、以下のように表される。

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S A v_i dS \quad \begin{array}{l} dV, dS : V \text{ および } S \text{ の要素} \\ v_i : \text{曲面 } S \text{ 上の外向き単位法線ベクトルの } i \text{ 成分} \end{array} \quad (1)$$

いま、(1)式で $A = x_3 (A = z)$ とし、 $\partial A / \partial z$ の体積積分に適用して変形すると、次式ようになる。

$$V = \int_V dV = \int_S z v_z dS \quad (2)$$

(2)式の曲面 S が、図-1に示すような三角形要素または台形要素が有限個集まってできたものと考え、

$$V = \sum_{i=1}^n z_{Gi} \cdot v_{zi} \cdot S_i = \sum_{i=1}^n z_{Gi} \cdot \text{sgn}(v_{zi}) \cdot |v_{zi}| \cdot S_i = \sum_{i=1}^n z_{Gi} \cdot \text{sgn}(v_{zi}) \cdot A_i \quad (3)$$

i : 要素番号、 z_{Gi} : 要素 i の重心高さ、 S_i : 要素の面積、
 A_i : 要素の平面図上での面積、
 v_{zi} : 要素 i の外向き単位法線ベクトルの z 成分、
 n : 要素数、 $\text{sgn}(x)$: 符号関数

符号関数 $\text{sgn}(x)$ は、以下のように定義される³⁾。

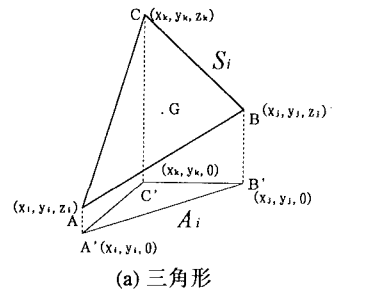
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (4)$$

三角形要素の場合、要素 i の $z=0$ 平面上への投影面積 A_i は図-1では $\triangle A'B'C'$ であり、これは頂点座標より

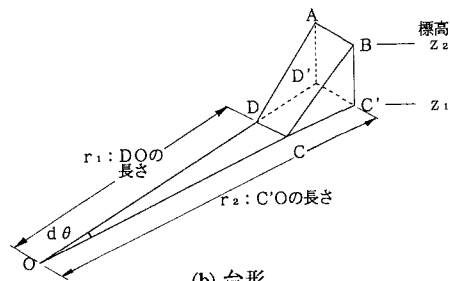
$$A_i = \frac{1}{2} (y_i + y_j)(x_i - x_j) + \frac{1}{2} (y_j + y_k)(x_j - x_k) + \frac{1}{2} (y_k + y_i)(x_k - x_i) \quad (5)$$

と計算される。また、要素 i の重心高さ z_{Gi} は、三角形の頂点の z 座標より、図-1に示す記号を用いて、

$$z_G = \frac{z_i + z_j + z_k}{3} \quad (6)$$



(a) 三角形



(b) 台形

図-1 要素

で計算される。台形要素の場合 A_i は $\triangle CC'D'D$ であり、これと要素の重心高さ z_{Gi} は半径 r_1, r_2 を用いて

$$A_i = \frac{r_{2i}^2 - r_{1i}^2}{2} d\theta_i, \quad z_{Gi} = \frac{(2r_{2i} + r_{1i})}{3(r_{2i} + r_{1i})} (z_{2i} - z_{1i}) + z_{1i} \quad (7)$$

となる。尚、(5) および (7) 式の投影面積は CAD に備えられた機能を用いることにより算定される。

3. 土量計算例

今、計算手法を示すために、簡単な例として (4) 式を図-2 のような仮置土砂の土量計算に適用する。図中の (60,10) 等は交点の座標で、CAD の平面図において適当に設定されているものである。まず、図-3 に示すように土塊の表面を補助線で三角形の要素に分割し、それぞれに番号をつける。次に、各要素について (4) 式の z_{Gi} 、 A_i 、 $\text{sgn}(\nu_{zi})$ を計算し、それぞれを掛け合わせたものを合計して体積を得る。ここで、 A_i については CAD の面積測定機能を用いて画面上で求め、 $\text{sgn}(\nu_{zi})$ は平面図上で外向き法線ベクトルの方向を確認することにより判定した。具体的には、 z 座標を上向きと定義して、要素が体積を求めようとする土塊の上側に位置するときは 1、下側のときは -1 とした。体積算定結果を表-1 に示す。

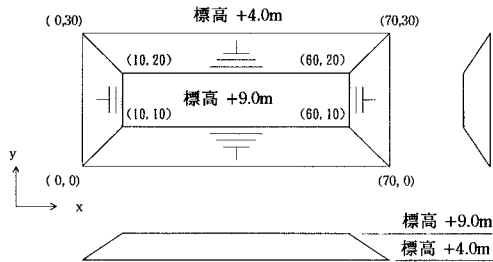


図-2 平面図および側面図

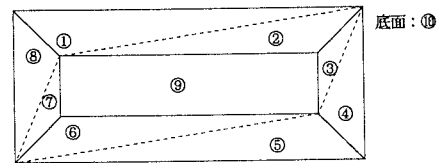


図-3 要素分割

表-1 体積算定結果

要素番号	頂点の標高(+m)			①重心高さ z_{Gi} (m)	②投影面積 (m^2)	③ $\text{sgn}(\nu_z)$	①×②×③
	i	j	k				
1	9.00	4.00	4.00	5.667	350.00	1	1983.33
2	9.00	9.00	4.00	7.333	250.00	1	1833.33
3	9.00	9.00	4.00	7.333	50.00	1	366.67
4	9.00	4.00	4.00	5.667	150.00	1	850.00
5	9.00	4.00	4.00	5.667	350.00	1	1983.33
6	9.00	9.00	4.00	7.333	250.00	1	1833.33
7	9.00	9.00	4.00	7.333	50.00	1	366.67
8	9.00	4.00	4.00	5.667	150.00	1	850.00
9	—	—	—	9.000	500.00	1	4500.00
10	—	—	—	4.000	2100.00	-1	-8400.00
合 計							6167 (m ³)

表-1 より結果は、6167 m³ となる。一方、図-2 に示す形状を柱体や錐体に分割して算定する従来の方法によって計算すると

$$V = \frac{1}{3} \times 10 \times 10 \times 5 + \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times (50 + 50 + 10 + 10) + 50 \times 10 \times 5 = 6167 \quad (m^3) \quad (8)$$

となり同様の値となる。本方法は、形状が複雑で手計算が困難なものに対しても、同様に適用可能である。

4. まとめ

Gauss 発散定理を利用して、2次元 CAD で描いた平面図上で土量計算を行う方法を示した。本報告では、簡単な計算例を示すにとどまったが、この方法は、形状が複雑な場合に適用した場合でも、効率的に計算可能であることが確認されている。

参考文献 1) 花村義久：CAD/CG の活用は土木をどこまでかえられるか，土木学会誌，第 80 巻第 1 号付録，pp.61-63,1995.1
2) Y.C. ファン（大橋義夫他共訳）：固体の力学／理論、培風館、1965. 3) 神谷紀生：演習境界要素法，サイエンス社、1985.