VI－146　材料非線形問題の逆解析手法に関する考察

法政大学　学　龍河　将史
法政大学　学　宮園　克久
法政大学　学　湯浅　貴史
法政大学　正　草深　守人

1. はじめに

近年, 逆解析手法は情報化施工の技術の一つとして確立されつつある. 本文では, 時間に依存しない非線形性を示す地盤材料に対して荷重増分法を導入した逆解析手法について考察する. 順解析における地盤材料の非線形な応力-ひずみ関係は, いくつかの区分に分割された接線で近似され, 各区間で一時的な線形弾性構成則が仮定できるものと考える. 同様に, 逆問題においても, 観測された荷重と変位の非線形な応答を順解析の増分法と同様に考え, 荷重変位関係に区分的な線形を仮定する. そして, 各増分区間ごとに観測境界条件を導入した剛性方程式を組み立て, 推定する材料パラメータに対する応答変位と観測値との差を最小化する境界制御問題として扱う.

2. 逆解析手法

有限要素離散系での増分変位は式(1)で与えられる. この計算変位と観測変位の誤差を式(2)で与え, その誤差を最小化する目的関数を式(3)で定義する.

$$\mathbf{U} = [\mathbf{K}(\mathbf{P})]^{-1}\mathbf{F} \quad (1) \qquad \Delta\mathbf{U} = \mathbf{M}\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}} \quad (2) \qquad \mathbf{E} = \Delta\mathbf{U}^T\Delta\mathbf{U} + f' \quad (3)$$

ここで, $\mathbf{M}$ は計算変位と観測変位を対応付ける論理マトリックスである. また, f' は未知のパラメータに対する任意の制約条件であり, たとえば個々の有限要素間の未知パラメータが連続的に滑らかに分布するという次のような提案もある.

$$f' = \phi \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}(P_i - P_j)^2 \tag{4}$$

ただし,

ϕ : ペナルティの大きさを調節する係数
w_{ij} : i 要素と j 要素が隣接しているとき，$w_{ij} \neq 0$
　i 要素と j 要素が隣接していないとき，$w_{ij} = 0$
m : 領域内の全要素数

次に, 変位 $\mathbf{U}$ を $\mathbf{U}^k$ の近傍で Taylor 展開することにより式(5)が与えられ, 同定パラメータ $\mathbf{P}$ に対する計算変位の変化率が式(6)で与えられる.

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^k + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial p_i}\delta p_i \tag{5}$$

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial p_i} = -[\mathbf{K}(\mathbf{P}^k)]^{-1}\frac{\mathbf{K}(\mathbf{P})}{\partial p_i}\mathbf{U} \tag{6}$$

以上の関係式を用いてパラメータ $\mathbf{P}$ を同定するための逆解析の基礎方程式が式(7)で与えられる.

$$\left[\mathbf{M}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial p_j}\delta p_j\right]^T\mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial p_i} + 2\phi\sum_{j=1}^{m}w_{ij}(\delta p_i - \delta p_j) = [\bar{\mathbf{U}} - \mathbf{M}\mathbf{U}^k]^T\mathbf{M}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial p_i} + 2\phi\sum_{j=1}^{m}w_{ij}(p_j - p_i) \tag{7}$$

さらに, 式(7)を実際の計算プログラムとして組み立てるためのマトリックス表示式を示す. 式(7)の左辺第一項は計算変位の変化率を $\mathbf{G}$ で表すことにより式(8)が与えられる.

$$
\begin{aligned}
\left[\mathbf{M}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\Delta\mathbf{U}}{\partial p_j}\delta p_j\right]^T \mathbf{M}\frac{\partial\Delta\mathbf{U}}{\partial p_i} &= \sum_{j=1}^{m}\left(\left[\mathbf{M}\frac{\partial\Delta\mathbf{U}}{\partial p_j}\right]^T\mathbf{M}\frac{\partial\Delta\mathbf{U}}{\partial p_i}\right)\delta p_j \\
&= \sum_{j=1}^{m}\mathbf{G}_j^T\mathbf{G}_i\delta p_j \\
&= \mathbf{C}_i^T\delta\mathbf{P} \qquad (i=1,2,\cdots,m)
\end{aligned} \tag{8}
$$

同様に, 式(7)の左辺第二項は, 制約条件と推定パラメータとを対応付けるための論理マトリックス $\mathbf{L}$, $\mathbf{W}$ を導入することにより式(9)のように書き換えることができる.

$$
\begin{aligned}
\phi\sum_{j=1}^{m}w_{ij}(\delta p_i-\delta p_j) &= \phi\sum_{j=1}^{m}w_{ij}\delta p_i-\phi\sum_{j=1}^{m}w_{ij}\delta p_j \\
&= \phi\{(\sum_{j=1}^{m}w_{ij})\mathbf{L}_i^T\delta\mathbf{P}-\mathbf{W}_i^T\delta\mathbf{P}\} \\
&= \phi\{\sum_{j=1}^{m}w_{ij}\mathbf{L}_i^T-\mathbf{W}_i^T\}\delta\mathbf{P} \\
&= \mathbf{C'}_i^T\delta\mathbf{P} \qquad (i=1,2,\cdots,m)
\end{aligned} \tag{9}
$$

さらに, 式(7)の右辺の既知項は次式のように書くことができる.

$$
\begin{aligned}
e_i &= [\Delta\tilde{\mathbf{U}}-\mathbf{M}\Delta\mathbf{U}^k]^T\mathbf{M}\frac{\partial\Delta\mathbf{U}}{\partial p_i}+\phi\sum_{j=1}^{m}w_{ij}(P_j^k-P_i^k) \\
&= [\Delta\tilde{\mathbf{U}}-\mathbf{M}\Delta\mathbf{U}^k]^T\mathbf{G}_i+\phi(\mathbf{W}_i^T\delta\mathbf{P}^k-\sum_{j=1}^{m}w_{ij}\cdot\mathbf{L}_i^T\delta\mathbf{P}^k) \\
&= [\Delta\tilde{\mathbf{U}}-\mathbf{M}\Delta\mathbf{U}^k]^T\mathbf{G}_i+\phi(\mathbf{W}_i^T-\sum_{j=1}^{m}w_{ij}\cdot\mathbf{L}_i^T)\delta\mathbf{P}^k \qquad (i=1,2,\cdots,m)
\end{aligned} \tag{10}
$$

式(7)に式(8), 式(9), 式(10)を代入することにより逆問題の基礎方程式が次式のように表される.

$$
\bar{\mathbf{C}}\cdot\delta\mathbf{P} = \mathbf{E} \tag{11}
$$

ここで, $\bar{\mathbf{C}}$ と $\mathbf{E}$ は以下のとおりである.

$$
\bar{\mathbf{C}}^T=\mathbf{C}_i^T+\mathbf{C'}_i^T \qquad\qquad \mathbf{E}=[e_1,e_2,\cdots,e_m]^T
$$

上式を未知パラメータ $\delta\mathbf{P}$ について解くことにより次ステップの更新値 $\mathbf{P^{k+1}}$ が計算される.

$$
\mathbf{P_i}^{k+1}=\mathbf{P}^k+\lambda\delta\mathbf{P_i} \tag{12}
$$

3. あとがき

現在までに実施した解析結果によると, 増分荷重毎に領域内の接線弾性係数を人為的に設定（領域内で一様）した順解析結果を観測値として逆解析から得られる推定値はかなり良い一致を示している。また、観測値として非線形な荷重ー変位関係を仮想的に設定した逆解析では、領域内で推定される物性値の非線形性を表現できることが明らかとなっている. 本文では紙面の都合から解析例を省略したが, 直接基礎を想定した模型実験と解析結果の比較を含めて 講演会発表時に報告する予定である.

[参考文献]

1) 山下 亮　蓮井 昭則 ：岩盤の非弾性的な変形挙動の逆解析法について, 土木学会第45会年次学術講演会講演集,1990. 2) 大上俊之 ： 一般化逆解析手法と岩盤力学への適用, 名古屋大学提出学位論文, 1991. 2.