

東京電機大学 学生員 ○渡辺規明

東京電機大学 正会員 松井邦人

1. はじめに

これまでFWD試験において、確定論的であるガウス・ニュートン法を用いて、解析が行われているが、未だ確立されていない。そこで本研究では、確率論的な方法であるベイズ法を用いて、舗装構造の逆解析を行い、ガウス・ニュートン法による結果との比較、検討を行った。

$$J = \frac{1}{2} \left\{ u - Z(X) \right\}^T R^{-1} \left\{ u - Z(X) \right\} + \frac{1}{2} (X - \bar{X})^T C^{-1} (X - \bar{X}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

が得られる。

(2) 式より評価関数を (3) 式のように置くとこの式を最小とする X が $P(X/u)$ を最大とする。このような X を $\hat{X}$ で表現する。

2. 逆解析手法

舗装構造は弾性多層構造でモデル化できると仮定

u : 測定変位ベクトル

$Z(X)$: 解析変位ベクトル

ϵ : 測定誤差ベクトル

X : 未知パラメータ（層弾性係数）

測定誤差は偶然誤差と仮定すると

$E[\epsilon] = 0$ 誤差の期待値

$E[\epsilon\epsilon^T] = R$ 誤差の共分散行列

X について事前情報が与えられたとすると

$E[X] = \bar{X}$ 期待値（平均値）

$E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] = C$ 共分散行列

確率の基礎概念であるベイズの定理に基づき、

(1) 式において u が与えられたとき、 $P(X/u)$ が最大となる X が最適解となる。

$$P(X/u) = \frac{P(u/X) \cdot P(X)}{P(u)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで X について事前情報が与えられた場合に、 X が正規分布であると仮定し、 $P(u)$ 、 $P(X)$ 、 $P(u/X)$ を求め (1) 式に代入し整理すると (2) 式

$$P(X/u) = \frac{\left| \frac{\partial Z}{\partial X} \right|_{X=\hat{X}} C \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}}^T + R \right|^{1/2}}{(2\pi)^{M/2} |C|^{1/2} |R|^{1/2}} \times \exp \{A\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$A = -\frac{1}{2} \left\{ u - Z(X) \right\}^T R^{-1} \left\{ u - Z(X) \right\} + \frac{1}{2} (X - \bar{X})^T C^{-1} (X - \bar{X}) + \frac{1}{2} (u - \bar{u})^T \left\{ \frac{\partial Z}{\partial X} \right|_{X=\hat{X}} C \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}}^T + R \right\}^{-1} (u - \bar{u})$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}}^T R^{-1} \frac{\partial Z}{\partial X} \right|_{X=\hat{X}} + C^{-1} \right\} (\hat{X} - \bar{X}) = \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}}^T R^{-1} \left\{ u - Z(\bar{X}) \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore \hat{X} = \bar{X} + \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}}^T R^{-1} \frac{\partial Z}{\partial X} \right|_{X=\hat{X}} + C^{-1} \right\}^{-1} \left(\frac{\partial Z}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}}^T R^{-1} \left\{ u - Z(\bar{X}) \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

必要条件 $\frac{\partial}{\partial X} J(X) = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$ より

(6) 式を用いて、繰返し計算することにより各層の弾性係数を求める。また、事前情報が無い場合、 C は無限大となることから、 $C^{-1} = 0$ となる。

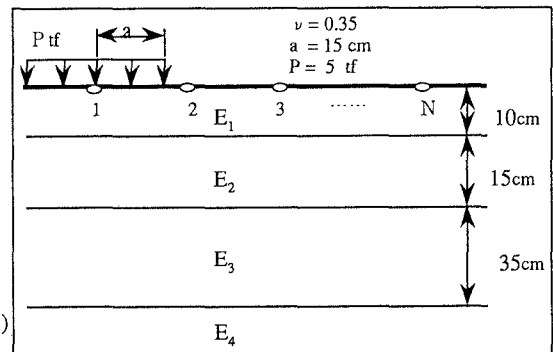


図-1 4層構造モデル

表-1 測定位置と表面たわみ（単位：mm）

測定位置	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700
たわみ	0.535	0.381	0.258	0.189	0.145	0.117	0.097	0.082	0.072	0.063

3. 数値解析例

ベイズ法の有効性を示すために、図-1に示すような4層構造を用いて、シミュレーションを行った。このモデルにBISAR(既存のソフト)を適用し、得られた表面たわみを表-1に示す。未知パラメータである弾性係数の初期値として、図-1に示す正解値に対し、 $\pm 50\%$ を加算した値を用いることにした。推定された層弾性係数を図-2に示す。ここで、表面たわみの測定誤差共分散と、未知パラメータの推定誤差共分散の入力が必要となる。測定誤差共分散は、測定値の変動係数が2%と仮定したときの値を用い、推定誤差共分散は事前情報が無い場合の値を用いた図-2からわかるとうり、解析値は十分に精度の良い値が、得られていることがわかる。

表-2 弾性係数推定値(単位: kgf/cm²)

初期値に正解値の50%増を用いた場合			
	正解値	Gauss	Bayes
表・基層	50000	50004	49998
上層路盤	5000	4998	5000
下層路盤	1500	1500	1500
路床	800	799	800
初期値に正解値の50%減を用いた場合			
	正解値	Gauss	Bayes
表・基層	50000	49998	49997
上層路盤	5000	5000	5000
下層路盤	1500	1500	1500
路床	800	800	800

Gauss: ガウス・ニュートン法
Bayes: ベイズ法

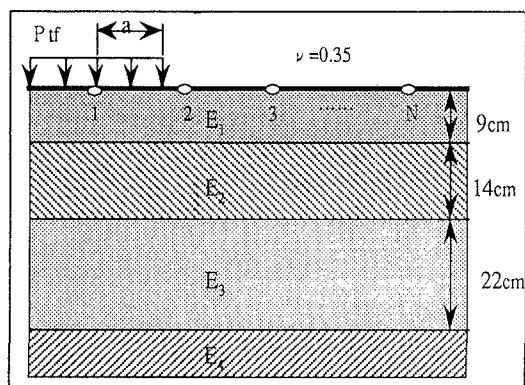


図-2 4層構造モデル

表-3 ガウス・ニュートン法による解析結果

測定機関	A	B	C	D
表・基層	89752	24736	46865	54539
上層路盤	248	3111	27583	748
下層路盤	15658	782	1992	1673
路床	705	726	2240	691

(単位 kgf/cm²)

表-4 ベイズ法による解析結果

測定機関	A	B	C	D
表・基層	75157	25438	16501	25438
上層路盤	208	2893	34477	2893
下層路盤	27122	842	3158	842
路床	749	717	2186	717

(単位 kgf/cm²)

4. 実測データを用いた解析結果

図-2に示すような4層構造における実測データについて、解析した結果を表-3、表-4に示す。

このデータは、測定方法が1ポイント多数回測定であり、解析においては1回目の測定値を無視し、測定たわみを換算たわみに置き換えて行った。

過去の情報を全く無視し、解析値と測定値の差の二乗を最小とするパラメータを求めるガウス・ニュートン法に対して、ベイズ法は過去の情報から弾性係数のばらつき又、測定値のばらつきも考慮し、測定値を与えられた場合に得られる解析値の確率が、最大であるパラメータを求める。数値シミュレーションでは評価関数も小さく、各層の弾性係数も非常に真値に近い値を示したが、実測値においては、表-3、表-4を見てもわかるように、ガウス・ニュートン法での問題点をベイズ法を用いることにより解決することは、できなかった。しかし、さらに多くのデータを解析することにより、推定値および推定誤差共分散に適切な値を仮定することができれば、問題点を緩和することができると思われる。