III－92

0－拡張された水平２次元地下水モデル解析

京都大学農学部　正会員　○浜口 俊雄・村 上 章・長谷川 高士

1. はじめに

水平２次元の不圧地下水を考察する場合、有効間隙率を適用した従来モデルを扱うことによって、自由（水面）境界の鉛直移動条件なしに水面挙動を簡便的に求め得る。ところが、広域地下水盆において、傾斜基盤の高い周辺領域で従来モデルの流動に適合しうる空間的な限界位置が降雨等の涵養により傾斜に沿って水平方向にも移動する[1),2)]。この位置が水平２次元の移動境界であり、簡略化モデルでは同境界で地下水面が傾斜基盤と接触していると見なし、地下水が同境界より下流域に貯留されて、上流域に貯留されていないと考える。よって、地下水盆に対する地下水流動には、時間的な境界の移動をふまえた新しいモデルが必要となる。本発表では、移動境界を伴う流動現象の導入に有用な拡張地下水モデルを新たに提案し、解析例を挙げて考察する。

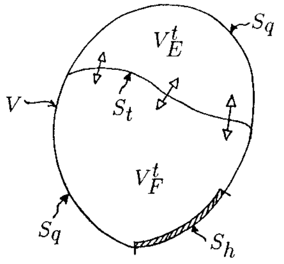

図 1: 領域概念

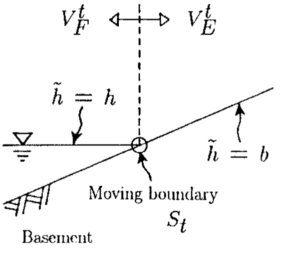

図 2: 拡張変数設定

2. 移動境界条件と背水域

いま、ピエゾ水頭を h、基盤高を b で表す。不圧な水平２次元地下水解析では $Dupuit$ の仮定から、h は地下水位にほぼ等価とみなせる。図１のように、固定境界のみで閉包される領域を V とおき、その中の $h \geq b, h < b$ の成立する部分空間領域をそれぞれ V_F^t, V_E^t とおく。

本発表では、従来の固定境界条件式 (1) に加えて、移動境界 S_t に対する条件式 (2) が与えられる。また、$Dupuit$ の仮定に従う流動では式 (2) の成立により、S_t 上の流量は明らかに０である。ただし、実際に近い流動モデルを V_E^t は V_F^t の背水域[3)]となっているので、S_t 上の流量が０とは限らない。つまり、V_E^t において、$Dupuit$ の仮定に従わない斜面流が S_t から V_F^t へ向けて流入することも考えられる。後程詳述するが、本稿における V_E^t の流動は、斜面流による V_F^t への流入量を、有限要素式上の V_E^t 関連項に結び付けることによって表現し得ると仮定した。

3. 変数・基礎方程式の拡張

本稿では、与条件をふまえ、水深 $h - b$ および $Darcy$ 則に関して領域 V_E^t への０－拡張[4)]を行い、固定領域 V で変数および基礎方程式を考察する。まず、図２のように考え、式 (3) により拡張されたピエゾ水頭 $\tilde{h}$ を擬似ピエゾ水頭として定義する。また、従来の基礎方程式 (4) は、式 (3) によって拡張されて式 (5) となる。本稿において、考察領域を等方透水と仮定し、かつ、簡便的に透水量係数を一定値と見なすことで、式 (5) は線形化され、式 (6) が得られる。ここに水深を $\tilde{h} - b = d_0$ と略記している。

$$h = \hat{h} \quad \text{on} \quad S_h \ , \quad k(h-b)\frac{\partial h}{\partial n} = -\hat{q} \quad \text{on} \quad S_q \tag{1}$$

$$h = b \quad \text{on} \quad S_t \tag{2}$$

$$\tilde{h} = b + (h-b) \cdot u\{h-b\} \qquad (u\{\cdot\}：\text{単位階段関数}) \tag{3}$$

$$\lambda\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ k(h-b)\frac{\partial h}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{ k(h-b)\frac{\partial h}{\partial y} \right\} + \varepsilon \tag{4}$$

ただし、λ：有効間隙率、k：透水係数、ε：涵養量

$$\lambda\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ k(\tilde{h}-b)\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{ k(\tilde{h}-b)\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \right\} + \varepsilon \tag{5}$$

$$\lambda\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} = kd_0\left(\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} \right) + \varepsilon \tag{6}$$

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{h}}_{t+1} = \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{h}}_t + \boldsymbol{\omega}_{t+\theta} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M} + \theta\boldsymbol{S} \ , \ \boldsymbol{B} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M} - (1-\theta)\boldsymbol{S} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{M} = \int_{V_F^t}\lambda(\phi_\alpha\phi_\beta)dV + \int_{V_E^t}\lambda(\phi_\alpha\phi_\beta)dV \tag{9}$$

$$\boldsymbol{S} = \int_{V_F^t}kd_0\left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial y}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial y}\right)dV \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{t+\theta} = -\int_{S_{q}{}_F^t}\hat{q}\phi_\alpha dS + \varepsilon\int_{V_F^t}\phi_\alpha dV + \varepsilon\int_{V_E^t}\phi_\alpha dV \tag{11}$$

$$\int_{V_E^t}\lambda(\phi_\alpha\phi_\beta)dV = 0 \ , \quad \boldsymbol{\zeta}_{t+\theta} = \int_{S_{tF}}\widehat{q_t}\phi_\alpha dS \tag{12}$$

ここに、$\hat{q}_t$ は $0 \leq \gamma_\tau \leq 1$ において次式を満たす

$$\widehat{q_t} = \sum_{n\geq 0}\gamma_{t-n}\varepsilon\int_{V_E^{t-n}}\phi_\alpha dV \qquad \left(\sum_{\tau\leq t}\gamma_\tau = 1\right) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{h}}_{t+1} = \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{h}}_t + \boldsymbol{\omega}'_{t+\theta} + \boldsymbol{\zeta}_{t+\theta} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M} + \theta\boldsymbol{S} \ , \ \boldsymbol{B} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{M} - (1-\theta)\boldsymbol{S} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{M} = \int_{V_F^t}\lambda(\phi_\alpha\phi_\beta)dV \tag{16}$$

$$\boldsymbol{S} = \int_{V_F^t}kd_0\left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial y}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial y}\right)dV \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\omega}'_{t+\theta} = -\int_{S_{q}{}_F^t}\hat{q}\phi_\alpha dS + \varepsilon\int_{V_F^t}\phi_\alpha dV \tag{18}$$

4. 有限要素法への適用

境界条件式 (1)~(2) に留意し、領域 V を対象にした弱形式を求め、空間について形状関数 ϕ により離散化する。続いて $\partial\tilde{h}/\partial t, \tilde{h}$ を、時間差分パラメータ θ ($0 \leq \theta \leq 1$) を用いた時間の展開および差分を行うことで式 (7)~(11) を得る。ただし、V を V_E^t と V_F^t に分割している[5]。

式 (7)~(11) において、V_E^t における涵養は、有効間隙の大きな地盤では貯留されることなく斜面流となって S_t 上へ流入する。したがって、V_E^t に関する項は、式 (12) の成立を見込んで、V_F^t への流入項 $\zeta_{t+\theta}$ に置換されると仮定した。改めて有限要素方程式を書き下せば、式 (14)~(18) と表記でき、V_F^t のみを対象とした方程式を成していることがわかる。換言すれば、S_t をもつ地下水面解析は、流入項を定義する式 (12) が求め得たとき、領域 V_F^t のみで近似的に解析可能であるといえる。

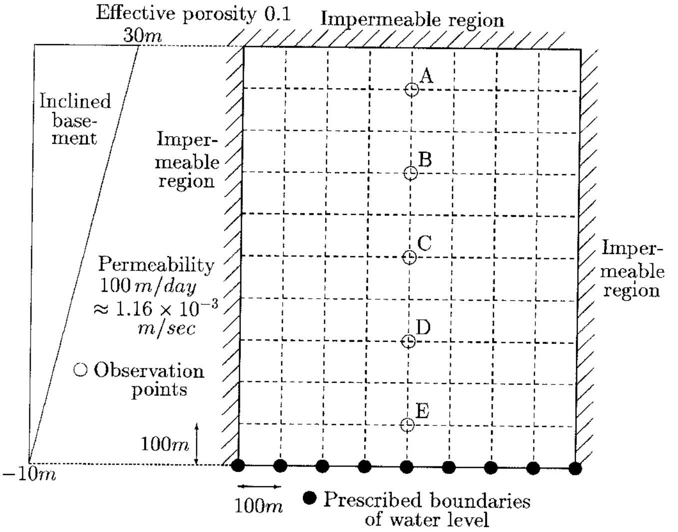

図 3: 仮想地盤

5. 固定した有限要素の移動境界

有限要素を固定したまま移動境界を用いるとき、S_t は離散的に移動し、一時的に固定される。不圧な水平２次元地下水解析において、S_t の一時固定は S_t 位置を不透水壁とすることと等価である。よって、S_t の上昇・下降移動両条件は、S_t 上における節点の $\tilde{h}$ 値が「上流へ移動：その上流節点の b を上回ること」・「下流へ移動：その位置の b よりも小回ること」とした。特に上昇時について、地下水はかなり穏やかな水頭勾配をもつと推定されるので、上記は上流まで水面上昇している十分条件といえる。固定要素を用いる長所は、将来的に逆解析[3]へ応用できる点にある。

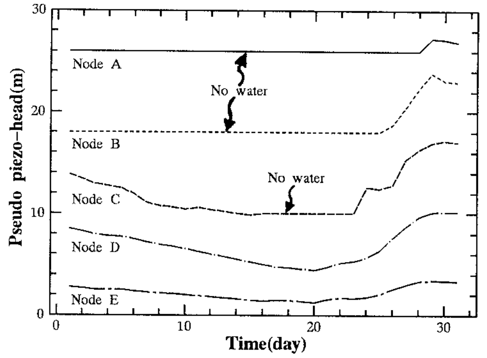

図 4: 解析結果

まず、模擬的な涵養を用いて図 3 に示す仮想地盤で数値計算を行った。観測点 A～E における結果を表すグラフが図 4 であり、水平となった時間領域では、基盤層標高と一致し、水深 0 を表す。図 4 から、上記時間領域終始時刻に S_t の境界移動を生じ得ているとわかる。

6. 結論

本稿では、従来のピエゾ水頭を用いず、水深の 0 -拡張により得られた擬似ピエゾ水頭を導入することで、移動境界を含む領域内の有限要素式を表せた。また、本解析例から、S_t の上昇・下降両移動に十分条件を用いた場合の境界移動を確認した。今後は、傾斜基盤層上の飽和不飽和解析によって、境界移動条件を更に吟味して、同移動を伴う地下水流動解析の精度を向上させ、実例やモデルパラメータ同定に応用していきたい。

参考文献

1) 浜口俊雄・長谷川高士・村上　章：境界移動を伴う地下水流動モデルの逆解析手法, 第 44 回応用力学連合講演会講演予稿集, pp.287–288, 1995. 2) 岡　太郎：移動境界を考慮した有限要素法による地下水平面解析, 応用水文, 第 4 巻, pp.17–21, 1992. 3) 長谷川高士・村上 章・浜口俊雄：拡張 Kalman フィルタによる地下水モデルのパラメータ同定と地下水位変動量評価による揚水量決定, 土木学会論文集, No.505/III–29, 1994. 4) 河原田秀夫：自由境界問題　理論と数値解法, 東京大学出版会, 1989. 5) 浜口俊雄・長谷川高士：境界移動を伴う水平２次元不圧地下水流動に関する定式化, 第 51 回農業土木学会京都支部研究発表会講演要旨集, pp.186–187, 1994. 6) 長谷川高士・石井将幸・浜口俊雄：宮古島砂川地下ダムの地下水流動解析, 第 49 回農業土木学会京都支部研究発表会講演要旨集, pp.52–53, 1992. 7) Neuman, S.P. and P.A.Witherspoon : Analysis of nonsteady flow with a free surface using the finite element method, *Water Resour. Res.*, Vol.7, No.3, pp.611–623, 1971. 8) 齋藤武雄：移動境界伝熱学, 養賢堂, 1994.