Ⅲ－86　多孔質体における透水問題の均質化手法による基礎的研究

戸田建設（株）　正会員　伊藤貴宏
名古屋大学工学部　正会員　市川康明

1. はじめに

地下水流動による周辺地盤の浸透汚染は現に起こり得る問題であり、今後地下中に廃棄物処理施設などを建設する場合には、その浸透特性を精密に把握する必要がある。本研究ではこの浸透係数の算定についての基礎的な解析を行なう。ミクロな材料構造を浸透係数に反映させるために均質化手法を用い、地下中の多孔質地盤を骨格系とその間隙から成る周期性構造を有すると仮定する。透水は、この間隙部分で起こるものとし、まず微視的単位周期構造体（ユニットセル）内での透水解析を行った。またミクロな方程式とマクロな方程式から、従来経験則であった Darcy 則、浸透方程式が導出できることを示す。

2. 非圧縮 Stokes 流の支配方程式

2.1. 均質化手法の導入

図１に示すようなユニットセルを考える。ユニットセルの流体部分に非圧縮 Stokes 流の仮定を用いると、質量保存則、運動量保存則、境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}^{\varepsilon} = 0, \quad -\nabla P^{\varepsilon} + \nabla \cdot \mu \nabla \boldsymbol{V}^{\varepsilon} + \boldsymbol{f}^{\varepsilon} = \mathbf{o} \quad \text{in} \quad Y_F \quad , \qquad \boldsymbol{V}^{\varepsilon} = \mathbf{o} \quad \text{on} \quad \Gamma \tag{1}$$

ここで ε はユニットセルのスケールである。また$\boldsymbol{V}^{\varepsilon}$は流速、$P$は圧力、$\mu$は粘性係数、$\boldsymbol{f}$は物体力である。つぎに $\boldsymbol{V}^{\varepsilon}, P^{\varepsilon}, \boldsymbol{f}^{\varepsilon}$について (1) 式を満たす解を以下の ε に関する摂動展開の形で探すことを考える。

$$\boldsymbol{V}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^2 \boldsymbol{V}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varepsilon^3 \boldsymbol{V}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cdots$$

$$P^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = P^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varepsilon P^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cdots$$

$$\boldsymbol{f}^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}^0(\boldsymbol{x}) + \varepsilon \boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cdots$$

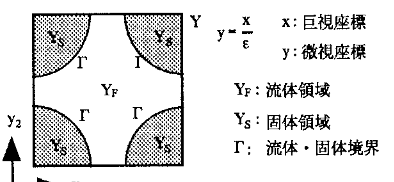

図１　ユニットセル

これを、微分が

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad , \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} + \frac{2}{\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_i} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$$

であることに注意して、(1) 式に代入すると、つぎに示すようなミクロ方程式とマクロ方程式が得られる。

・ミクロ方程式

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial^2 V_i^0}{\partial y_j \partial y_j} - \frac{\partial P^1}{\partial y_i} &= \frac{\partial P^0}{\partial x_i} - \rho X_i^0 && \text{in } Y_F \\ \frac{\partial V_j^0}{\partial y_j} &= 0 && \text{in } Y_F \\ V_i^0 &= 0 && \text{on } \Gamma \end{aligned} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} V_i^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) &= V_i^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Y};t) \\ P^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};t) &= P^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{Y};t) \end{aligned}\right\} \text{周期条件（周期}\ \boldsymbol{Y}\text{）}$$

・マクロ方程式

$$\frac{\partial V_j^0}{\partial x_j^0} + \frac{\partial V_j^1}{\partial y_j^0} = 0 \tag{3}$$

そしてこれらを $(\rho \boldsymbol{X}^0 - \nabla_x P^0)$ で正規化し、

$$v_i^k = \frac{V_i^0}{\rho X_k^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x_k}} \qquad \left(V_i^0 = \left(\rho X_k^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x_k} \right) v_i^k \right) \tag{4}$$

2.2.均質化透水係数

図２のような２次元的な流れを生じるようなユニットセルを用いて有限要素法により特性流速関数の分布を求め（図３)、ユニットセルにおける均質化透水係数を算定した。そこで平均化の公式を(5)式のように定義する。$|Y|$ はユニットセルの体積を表す。

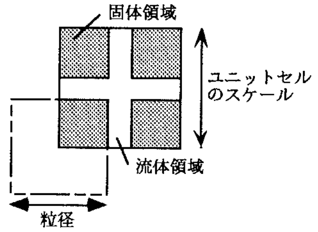

図２　解析の対象としたユニットセル

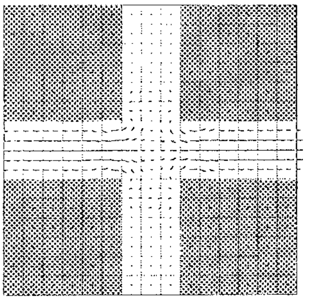

図３　特性流速関数の分布（ scale 1.3mm ）

$$\widetilde{v_i^k} = \frac{1}{|Y|}\int_Y v_i^k dy \tag{5}$$

この(5)式をマクロ方程式に適用すると

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\left(\rho X_k^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x_k}\right)\underline{\frac{1}{|Y|}\int_{Y_F} v_i^k dy}\right\} = 0 \tag{6}$$

(6)式中の｛　｝内は下線部を平均透水係数と見なすことができ、すなわち Darcy 則を形成していることが分かる。そして(6)式こそ従来の浸透方程式であることに注意する。このようにして求めた均質化透水係数はユニットセルのスケール、ユニットセルにおける間隙率との関係として図４、図５のように表すことができる。

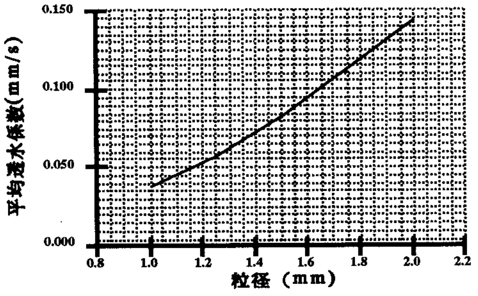

図４　スケール－均質化透水係数関係

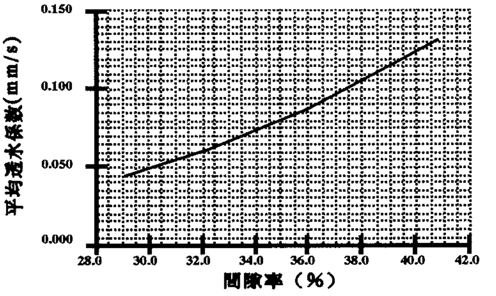

図５　間隙率－均質化透水係数関係

3.結論

Navier-Stokes 方程式をミクロな視点で解くことによって、Darcy 則の理論的背景を裏付けることができた。地盤材料をミクロな視点で観察し、有限要素メッシュを忠実に作成すれば透水係数が計算によって求めることができることがわかった。透水係数の性質として、間隙率の変化による影響よりもユニットセルのスケールの変化による影響が大きい事が分かる。

4.参考文献

1. 矢川元基：流れと熱伝導の有限要素法入門，　培風館　1983
2. 椿東一郎：水理学１，　森北出版　1973
3. 市川康明：地盤力学における有限要素法入門，　日科技連 1990
4. Enrique Sanchez-Palencia: Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, Springer-Verlag 1980
5. Thomas J.R.Hughes: The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, PRENTICE-HALL,INC.