

II-397 矩形容器内のスロッシング解析

清水建設(株) 和泉研究室 正会員 清川哲志

1. まえがき

近年、各地で大型水槽を有する水族館が建設されている。そして、水槽内部に水中展望室や水中トンネル等を設ける等、複雑化の傾向がある。本研究は、そのような水槽の地震時スロッシング解析手法を提案するもので、矩形容器内で減衰がある場合の波動のグリーン関数を導き、これを利用することで効率的な数値計算を可能としている。また、数値計算といっても全体系をそのまま離散化するFEM、BEM等と異なり、各部の影響を陽な形で求めることができるため、水槽内施設配置の最適設計等にも便利である。

2. 解析理論

(1) 基礎方程式と境界条件

図-1に示したように、矩形水槽内に構造物 S_V があるものとする。そして、水槽ごと水平面で x 軸と θ の角度をなす方向に調和振動をしているものとする。流体は非圧縮、非粘性とし、流体運動は非回転とすると、流体運動は速度ポテンシャル $\phi(x, y, z)e^{i\omega t}$ によって記述できる。ただし、 ω は振動の角振動数、 i は虚数単位($=\sqrt{-1}$)、 t は時間である。これは、時間領域における現象を Fourier 変換して周波数領域で考えることに対応する。そして、得られる解を Fourier 逆変換すれば、時間領域で直接解くのと等価であり、波動解析にはしばしば用いられる。

速度ポテンシャルの空間部分 ϕ に関する基礎方程式と境界条件は以下のとおりである。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{1}{g}(\omega^2 - i\mu\omega)\phi = 0 \quad (\text{on } S_F) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (\text{on } S_B) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cos \theta \quad (x=0, a) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sin \theta \quad (y=0, b) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_x \cos \theta + n_y \sin \theta \quad (\text{on } S_V) \quad (6)$$

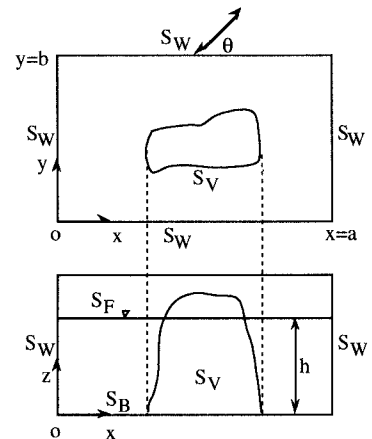


図-1 解析領域と座標系

ここに、基礎方程式 (1) は 3 次元ラプラス方程式で、水槽 Ω 内の流体の

質量保存則を表わしている。式 (2) は自由表面 S_F における圧力および運動学的条件で、 μ は液面動揺の減衰係数、 g は重力加速度を表わす。式 (3) は水槽底面 S_B における不透過条件。式 (4)、(5)、(6) は水槽壁面 S_W および内部構造物表面 S_V の運動速度と流体の運動速度の連続条件で、 n による微分は内部構造物表面 S_V 上における法線方向微分、 n_x 、 n_y はそれぞれ S_V 上の単位法線ベクトルの x 、 y 成分を表わす。

(2) 矩形水槽内の波動のグリーン関数

式(1)-(6)で示される境界値問題を解くため、この境界値問題に適応するグリーン関数を用い、境界積分法による解析を行う。本問題に対応するグリーン関数 G を、矩形水槽 Ω 内で、式(1)の代わりに次式を満足し、境界条件として式(2)-(5)で ϕ を G に替えその右辺を 0 とした境界値問題を満足する解として定義する。

$$\nabla^2 G = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta) \quad (\text{in } \Omega) \quad (7)$$

ここに、 δ : ディラックのデルタ関数、 (ξ, η, ζ) : 領域内の点を表わすパラメータ。

以上からわかるように、グリーン関数 G は、点 (ξ, η, ζ) を除くすべての点で基礎方程式であるラプラス方程式を満足し、同時に、自由表面および水槽底面で、速度ポテンシャル ϕ と同じ境界条件を満足するものである。また、壁面上では不透過条件を満足している。このため、後に述べるように数値計算の際に必要な要素分割は、内部構造物のみ行えばよく、計算機容量、解析精度などの面で有利となる。本条件を満足するグリーン関数は次式のように表される。

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{2ab\lambda_{mn}} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi \xi}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi \eta}{b} \times \left[e^{-\lambda_{mn}|z-\zeta|} + e^{-\lambda_{mn}(z+\zeta)} + \frac{2\{\omega^2 - i\mu\omega + g\lambda_{mn}\}e^{-\lambda_{mn}h} \cosh \lambda_{mn}\xi \cosh \lambda_{mn}z}{\{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) + i\mu\omega\} \cosh \lambda_{mn}h} \right] \quad (8)$$

ここに、 ε_n ノイマン数 ($n=0$ のとき 1、 $n=1, 2, \dots$ のとき 2) である。また、 λ_{mn} は固有値、 ω_{mn} は x 方向 m 次、 y 方向 n 次の矩形水槽内のスロッシングの固有周期で、それぞれ次式によって求められる。

$$\lambda_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \quad (9) \quad \omega_{mn}^2/g = \lambda_{mn} \tanh \lambda_{mn}h \quad (10)$$

式(13)からわかるように、 $m=n=0$ のときは $\lambda_{mn}=0$ となるので、式(12)の代わりに次式によって求める。

$$g_{00} = (1/ab) \{ -|z-\zeta|/2 - (z+\zeta)/2 + h - g/(\omega^2 - i\mu\omega) \} \quad (11)$$

(3) 境界積分方程式と速度ポテンシャル

グリーンの定理および先に求めたグリーン関数(8)を用いて境界積分方程式を導く過程は通常どおりである。 S_W 上の積分を実行すると最終結果は次式となる。

$$\frac{1}{2} \phi(\xi, \eta, \zeta) + \iint_{S_V} \phi(\partial G/\partial n) dS = F_x + F_y + \iint_{S_V} G(n_x \cos \theta + n_y \sin \theta) dS \quad (12)$$

ここで、 F_x および F_y は次式で求められるソース項である。

$$F_x = \left[\xi - a/2 + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (4/a\lambda_{m0}^2) \right] \left\{ 1 - \left\{ \omega^2 - i\mu\omega + g\lambda_{m0} \right\} \tanh \lambda_{m0}h / \left\{ (\omega_{m0}^2 - \omega^2) + i\mu\omega \right\} \right\} \times \exp(-\lambda_{m0}h) \cos \lambda_{m0}\xi \cosh \lambda_{m0}\zeta \cos \theta \quad (13)$$

$$F_y = \left[\eta - b/2 + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (4/b\lambda_{0m}^2) \right] \left\{ 1 - \left\{ \omega^2 - i\mu\omega + g\lambda_{0m} \right\} \tanh \lambda_{0m}h / \left\{ (\omega_{0m}^2 - \omega^2) + i\mu\omega \right\} \right\} \times \exp(-\lambda_{0m}h) \cos \lambda_{0m}\eta \cosh \lambda_{0m}\zeta \sin \theta \quad (14)$$

式(12)を通常行なうように離散化して数値的に解くことによって、内部構造物表面上の速度ポテンシャル ϕ が数値的に得られる。そして、得られた速度ポテンシャル ϕ の値を用いて水槽内の任意の点(ξ, η, ζ)における速度ポテンシャル ϕ の値が次式によって求められる。

$$\phi(\xi, \eta, \zeta) = F_x + F_y + \iint_{S_V} G(n_x \cos \theta + n_y \sin \theta) dS - \iint_{S_V} (\phi \partial G/\partial n) dS \quad (15)$$

式(15)からわかるように、この系への外力(入力)は、右辺の第1-第3項である。右辺第1項および第2項は、水槽側壁面を通じて励起される波動、すなわちスロッシングを表わす項である。右辺第3項は内部構造物が液体中で振動することによって生じる波動を表わしている。また、右辺第4項は、内部構造物による波動の散乱を表わしている。したがって、内部構造物がない場合、右辺は F_x および F_y のみとなり、矩形容器が水平振動するときの厳密解が得られていることがわかる。なお、内部構造物が複数ある場合は、式中の内部構造物表面上の積分を各棒造物に分けることにより、どの構造物の影響が強いかな等を容易に把握することができる。

3. 結語

矩形容器内のスロッシングの解析理論を示した。これには、新たに導いたグリーン関数を用いている。ここで示した解析法の副産物として、容器内に構造物がない場合の厳密解が得られた。矩形容器が任意の方向に水平振動する場合の厳密解は今迄得られていなかったものと思われる。また、導いたグリーン関数は他の問題にも色々応用できる。そういう意味でここに示した結果は有用と考える。紙面の都合上、解析結果を示すことができなかったが、数値計算結果は妥当なものであった。これについては別の機会に発表する予定である。