

II - 384

高次 Boussinesq 方程式とその分散特性について

名古屋工業大学 正員 柏原謙爾
 名古屋工業大学 正員 喜岡 渉
 (株)奥村組 藤井靖也

1. はじめに

非線形性と分散性を同時に考慮した波動方程式として Boussinesq 方程式が波浪伝播変形の計算に広く用いられているが、その近似オーダーは低次であり、例えば中間水深、バー背後の水深増大部、砕波点近傍等における波形の再現性については良好ではない。近年、分散性を高精度に評価可能な波動方程式が提案されているが、非線形項を取り込んだ波浪伝播変形の具体的な計算には不確定要素が多く、差分法などにおける従来の計算アルゴリズムが適用可能であるという点から見れば、Boussinesq 方程式の高精度化についても検討を加えておくべきであろう。本研究では、任意水深の水平方向流速を代表流速として用いた Nwogu (1993) に従って分散性の精度を向上させたさらに高次の波動方程式の誘導を行い、その分散特性について検討を行う。

2. 高次 Boussinesq 方程式の誘導

流体運動の基礎方程式、境界条件式および無次元化については従来の Boussinesq 方程式と同様である。ただし、Nwogu (1993) と同様に代表流速を任意水深 z_α での水平方向流速 u_α で与えることとする。また、非線形性、分散性についてはそれぞれ $\varepsilon = a_0/h_0$ 、 $\mu^2 = \omega_0^2 h_0/g$ (a_0 : 代表振幅、 h_0 : 代表水深、 ω_0 : 代表角周波数) をパラメーターとし、 $O(\varepsilon) \sim O(\mu^2)$ の仮定を設け $O(\mu^4)$ の項まで考慮する。すなわち $O(\varepsilon^2, \varepsilon\mu^2, \mu^4)$ の項まで考慮すると、水位変動 ζ と u_α について以下に示す高次 Boussinesq 方程式 (1), (2) が得られる。

$$\begin{aligned} \zeta_t + \left[(\varepsilon \zeta + h) u_\alpha \right]_x + \mu^2 \left[\left(\frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} h^2 \right) h u_{\alpha xx} + \left(z_\alpha + \frac{1}{2} h \right) h (h u_\alpha)_{xx} \right]_x + \mu^2 \left[\varepsilon \zeta \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 u_{\alpha xx} + z_\alpha (h u_\alpha)_{xx} \right\} \right]_x \\ - \mu^4 \left[\left(-\frac{5}{24} z_\alpha^4 - \frac{1}{2} z_\alpha^3 h - \frac{1}{6} z_\alpha^2 h^2 - \frac{1}{120} h^4 \right) h u_{\alpha xxxx} + \left(-\frac{1}{3} z_\alpha^3 - z_\alpha^2 h - \frac{1}{3} z_\alpha h^2 + \frac{1}{24} h^3 \right) h (h u_\alpha)_{xxxx} \right. \\ \left. + \left(-z_\alpha h - \frac{1}{2} h^2 \right) h \left(\frac{1}{2} h^2 u_\alpha \right)_{xxxx} + \left(z_\alpha + \frac{1}{2} h \right) h \left(\frac{1}{6} h^3 u_\alpha \right)_{xxxx} \right. \\ \left. - \left(z_\alpha + \frac{1}{2} h \right) h \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 \{ 2 h_x u_{\alpha xxx} + h_{xx} u_{\alpha xx} \} + z_\alpha \{ 2 h_x (h u_\alpha)_{xxx} + h_{xx} (h u_\alpha)_{xx} \} + \left\{ 2 h_x \left(\frac{1}{2} h u_\alpha \right)_{xxx} + h_{xx} \left(\frac{1}{2} h u_\alpha \right)_{xx} \right\} \right] \right]_x \\ = O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon \mu^4, \mu^6) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_{\alpha t} + \varepsilon u_\alpha u_{\alpha x} + \zeta_x + \mu^2 \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 u_{\alpha txx} + z_\alpha (h u_{\alpha t})_{xx} \right] - \mu^2 \left[\varepsilon \zeta (h u_{\alpha t})_x \right]_x \\ - \mu^4 \left[\left(-\frac{5}{24} z_\alpha^4 - \frac{1}{2} z_\alpha^3 h \right) u_{\alpha txxx} + \left(-\frac{1}{3} z_\alpha^3 - z_\alpha^2 h \right) (h u_{\alpha t})_{xxxx} + (-z_\alpha h) \left(\frac{1}{2} h^2 u_{\alpha t} \right)_{xxxx} + z_\alpha \left(\frac{1}{6} h^3 u_{\alpha t} \right)_{xxxx} \right. \\ \left. - z_\alpha \left[\frac{1}{2} z_\alpha^2 \{ 2 h_x u_{\alpha txxx} + h_{xx} u_{\alpha txx} \} + z_\alpha \{ 2 h_x (h u_{\alpha t})_{xxx} + h_{xx} (h u_{\alpha t})_{xx} \} + \left\{ 2 h_x \left(\frac{1}{2} h u_{\alpha t} \right)_{xxx} + h_{xx} \left(\frac{1}{2} h u_{\alpha t} \right)_{xx} \right\} \right] \right]_x \\ + \varepsilon \mu^2 \left[u_\alpha \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 u_{\alpha x} + z_\alpha (h u_\alpha)_x \right\}_x + \frac{1}{2} \{ (h u_\alpha)_x \}^2 \right]_x \\ = O(\varepsilon^2 \mu^2, \varepsilon \mu^4, \mu^6) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、添字 t および x はそれぞれ時間および空間についての微分を表している。高次分散項の考慮は結果として u_α について空間 5 階の導関数を出現させることになる。

3. 高次 Boussinesq 方程式の分散特性

(1) 分散関係式: 式(1), (2) を線形化し一定水深を仮定することでこの方程式系における分散関係式(3) が得られる。

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3} \right) (kh)^2 + \left(\frac{5}{24} \alpha^4 + \frac{5}{6} \alpha^3 + \frac{7}{6} \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{15} \right) (kh)^4}{1 - \left(\frac{1}{2} \alpha^2 + \alpha \right) (kh)^2 + \left(\frac{5}{24} \alpha^4 + \frac{5}{6} \alpha^3 + \alpha^2 + \frac{1}{3} \alpha \right) (kh)^4} \quad (3)$$

ここに、 C は波速、 ω 、 k はそれぞれ角周波数、波数を示し、また $\alpha = z_a/h$ である。

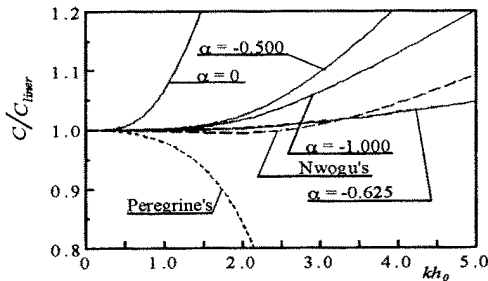


図-1 高次 Boussinesq 方程式の分散特性

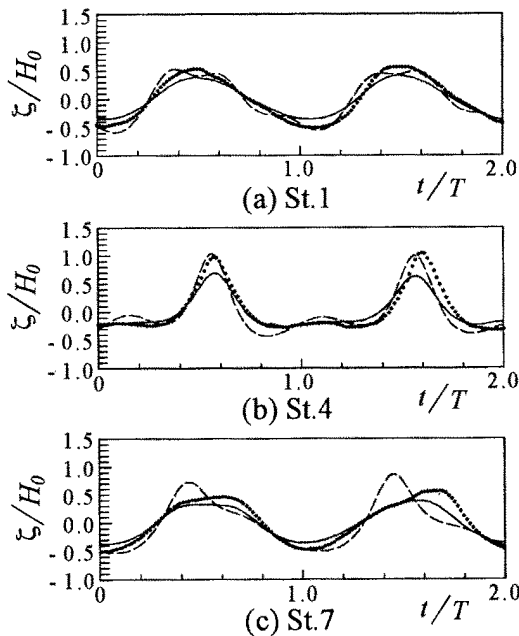


図-2 ステップ地形上の時間波形

図-1 は式(3) を基に α すなわち代表流速を定義する水深を変化させたときの分散特性について示したものである。 α を調整し -0.625 とした場合、Nwogu の方程式よりもさらに相対水深の大きな領域まで分散性についての改善効果が得られることがわかる。

(2) 波浪伝播変形計算： 分散関係式では省略されるが、式(1)、(2)の持つ $O(\epsilon \mu^2)$ の項も分散性に対し寄与することから、非線形項を含む波浪伝播変形計算を行い実験波形との比較を行った。数値計算には差分法を用いている。図-2 は波高 $H_0 = 5$ cm 周期 $T = 1.34$ s の正弦波を水深 15 cm のステップ断面地形に入射させた場合のステップ端部(St.1)、端部から 1.5 m (St.4)、3.0 m (St.7) の各測点における時間波形である。図中、高次 Boussinesq 方程式の波形を実線、実験波形を黒点で、また比較のために Nwogu の方程式による計算結果を破線で示してある。St.1、4、7 のいずれの観測点においても高次 Boussinesq 方程式による計算結果では Nwogu の方程式による計算結果に見られるような波の切り立ちおよび分裂は現れていない。ただし、高次 Boussinesq 方程式による計算結果ではダンピングが生じており、その度合いは波の進行にしたがい次第に顕著になっている。本研究では空間の離散化以外は Nwogu の方程式に対してと同様のアルゴリズムを使用しており、高階の差分近似については計算の安定化をはかる上で今後検討を加える必要があろう。

4. おわりに

高次 Boussinesq 方程式を誘導しその波浪伝播特性について検討を行い、Nwogu の方程式より相対水深の大きい領域まで分散性を改善できる可能性があることを示した。また、ステップ上における伝播変形計算では、Nwogu の方程式よりも比較的短周期の波に対して良好な波形の再現結果が得られた。

参考文献

Nwogu, O. (1993) : Alternative Form of Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation, J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., Vol. 119, No. 6, pp.618-638.