

II-382

浅海での非線形分散波のモデル方程式

琉球大学 正員 筒井 茂明

1. 緒言

複雑な海岸・海底地形に対する波の非線形性を考慮した数値計算においては、広範囲の周波数の波を対象としなければならないことから、Peregrine(1967)が Boussinesq型方程式を導いて以来、同種の浅水変形方程式に関する研究は理論・実験両面から発展してきた。Benjamin, Bona, & Mahony (1972)はその一般論を展開し、分散性長波方程式群におけるBBM方程式の有用性を論じている。間瀬ら(1991)はKdV方程式における分散項に対する修正モデルを提案しているが、反射波があるときには使用できない。したがって、ここでは入・反射波がある場合の波動場を対象にし、波の非線形性と線形分散項を合わせもつモデル方程式を提案する。

2. モデル方程式

静水面に座標原点を採り、水平軸を (x, y) 、鉛直軸を z とし、時間、水深、水面変位、水平方向の水深平均流速、圧力をそれぞれ $t, h, \eta, u = (u, v), p$ とする。連続方程式およびEulerの運動方程式の (x, y) -成分の水深平均を行うと次式が得られる。

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \eta) u] = 0 \quad (1)$$

$$u_t + \varepsilon u \cdot \nabla u = -(1/h) \int_{-h}^0 \nabla \cdot p \, dz \quad (2)$$

ただし、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ であり、全ての物理量は代表水深 h_0 、速度 $:\sqrt{gh_0}$ 、時間 $:\sqrt{h_0/g}$ (g :重力加速度)で無次元化されている。式(2)の右辺の圧力変動項をEulerの運動方程式の z -成分により評価するとPeregrine(1967)の式が得られる。ここでは式(1)、(2)が線形波の分散関係を満たすように式(2)の右辺を表示する。いま、速度ポテンシャル $\phi(x, y, z, t)$ を関数 ϕ のFourier積分を用いて

$$\phi = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \cosh[k(h+z)] \phi \, dk_x \, dk_y \quad (3)$$

と表わすと、Eulerの運動方程式の線形部より(Chester, 1968)、式(2)の右辺は

$$-\frac{1}{(2\pi)^2} \nabla \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \cosh[k(h+z)] \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\tanh kh}{kh} \, dk_x \, dk_y$$

となる。ただし、 $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ は波数である。しかるに、

$$\nabla \eta = -\frac{1}{(2\pi)^2} \nabla \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \cosh[k(h+z)] \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dk_x \, dk_y \quad (4)$$

であるから

$$K(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \frac{\tanh kh}{kh} \, dk_x \, dk_y \quad (5)$$

なるFourier変換が存在すれば、式(2)は次の微積分方程式で近似される。

$$u_t + u \cdot \nabla u = - \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \eta(x - \xi, y - \zeta, t) K(\xi, \zeta) \, d\xi \, d\zeta \quad (6)$$

式(1)、(6)が所要のモデル方程式であるが、これらが有用であるためには式(5)で定義されるFourier変換が存在しなければならない。

ここで、簡単のため断面二次元の場合を考えると、以上と同様にして次式が得られる。

$$\eta_t + [(h + \eta) u]_x = 0 \quad (7)$$

$$u_t + u u_x = - \int_{-\infty}^{\infty} \eta_x(x - \xi, t) K(\xi) \, d\xi \quad (8)$$

ただし、

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{\tanh kh}{kh} \, dk = -\frac{1}{\pi h} \ln \tanh \left[\pi |x|/4h \right] \quad (9)$$

である。すなわち、積分核は無次元波速の自乗のFourier変換である。分散項は式(8)右辺の積分項に含まれている。式(7)、(8)が線形分散式を満たすことは次のように証明される。一定水深の場合を考え、これらの式の線形部分より u を消去すると

$$\eta_{tt} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_x(x - \xi, t) K(\xi) \, d\xi = 0 \quad (10)$$

が得られる。上式に $\eta = a \exp \{i(kx - \sigma t)\}$ (σ :周波数)を代入し、逆Fourier変換を行うと式(9)が得られる。また、長波近においては $K(x) = \delta(x) + (h^2/3)\delta_{xx}(x) + \dots$ であるから最低次近似 $u_t = -\nabla \eta$ を用いると式(7)、(8)はPeregrine(1967)の求めたBoussinesq型方程式となる。さらに、式(7)、(8)より次式が得られる。

$$\eta_{tt} + (3/2)h^{-3/2}\eta\eta_{\theta} + (1/4)(h_x/h)\eta + (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} h^{-1/2} \times \eta_{\theta}(x - \xi, \theta) K(\xi) \, d\xi - (1/2)h^{-1/2}\eta_{\theta} = 0 \quad (11)$$

ただし、 $\theta = \int h^{-1/2} dx - t$ である。式(11)は長波近似では任意水深でのKdV方程式となる。

3. 分散項の検討

一定水深の場合を考え、式(8)の右辺で表される分散項について検討する。積分核 K は偶関数で、かつ条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} h K(x) dx = 1 \quad (12)$$

を満たしている(筒井, 1994) Seliger (1968) も同種のモデル方程式を提案しており, そこでの積分核は

$$K_g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \sqrt{\frac{\tanh kh}{k}} dk \quad (13)$$

で与えられるが, この Fourier 変換は不詳である. 本モデルの積分核 K の近似式は

$$K(x) = \begin{cases} -(1/\pi h) \ln |x| & |x| \rightarrow 0 \\ (2/\pi h) \exp(-\pi|x|/2) & |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (14)$$

であり, $|x| \rightarrow 0$ では対数ポテンシャルとなっている. したがって, 積分核 K は可積分であり, K_g より取り扱いが容易である. 図-1 は $h=1$ としてこれら積分核を比較したもので, 積分核 K の影響範囲が K_g のそれより狭くなっていることが判る.

式(9)で与えられる積分核は $|x| > 4h$ で $K(x) \approx 0$ であるから, $|x| < 4h$ での振幅の変化が小さいと仮定できる場合には式(11)は次式で近似される.

$$\eta_x + (3/2)h^{-3/2}\eta\eta_x + (1/2)\beta\eta_x = 0 \quad (15)$$

$$\beta = -h^{-1/2}(1 - \tanh kh/kh) \quad (16)$$

式(15)における線形波の波速を求めると

$$c \equiv 1 / [1 + (kh)^2 / 6] \quad (17)$$

となり, Boussinesq 型方程式における近似と一致する.

波高水深比 $H=0.3$, 無次元周期 $T=40$ の波の伝播変形をスペクトル法により数値計算し, KdV 方程式の結果との比較を例示すると図-2 となる. ただし, x は座標原点からの無次元距離である. 伝播に伴う波の変形はよく表わされている. しかし, 式(15)における分散効果は KdV 方程式と比べて小さく主峰がやや大きくなっている. この結果には式(11)から式(15)を求める際に用いた仮定の影響がでているものと考えられる.

5. 結 語

波の入・反射波が混在する場合に対して一般的な分散式を表わすモデル方程式を提案し, 断面 2 次元の場合につき検討を行ない, その妥当性を示した. 今後, ここで提案した 3 次元モデル方程式に対する積分核(5)の確定および能率的な数値計算法の開発が望まれる.

[参考文献] 筒井茂明 (1994): 線形分散と浅海長波の非線形性を合わせ持つモデル方程式, 琉球大学工学部紀要, 第 48 号, pp.41-50. 間瀬肇・James T. Kirby・栗林賢一 (1991): 不規則波浪の浅水変形モデル, 第 38 回海岸工学論文集, JSCE, pp.51-55. Benjamin, T. B., J. L. Bona and J. J. Mahony (1972): Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., Vol. A272, pp.47-78. Chester, W. (1968): Resonant oscillations of water waves. I. Theory, Proc. Roy. Soc. Lond., A.306, pp.5-12.

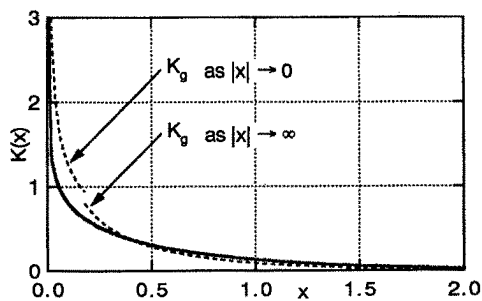
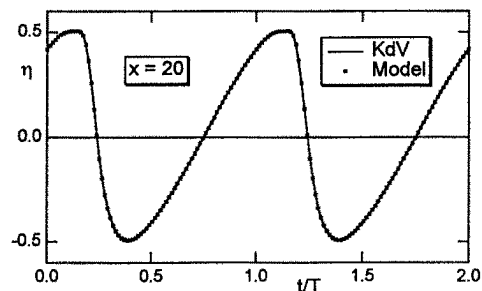
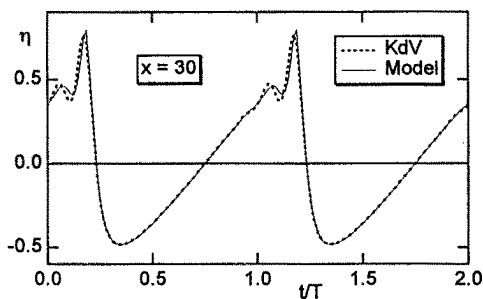


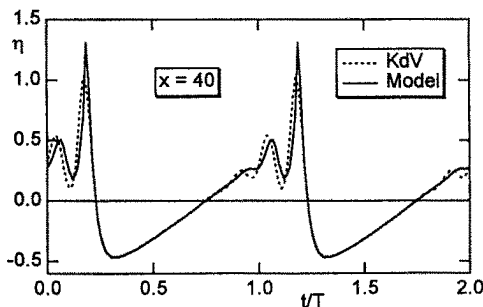
図-1 積分核の比較



(1) $x=20$



(2) $x=30$



(3) $x=40$

図-2 一定水深域での波の伝播に及ぼす分散項の影響

Peregrine, D. H. (1967) Long waves on a beach, Jour. Fluid Mech., Vol.27, pp.815-827. Seliger, R. L. (1968): A note on the breaking of waves, Proc. Roy. Soc. Lond., Vol.A.303, pp.493-496.