

II - 302

カルマンフィルタによる潮汐流解析

○中央大学 学員 早川 豊
(株)INA 正員 高木 利光
中央大学 正員 川原 睦人

1 はじめに

海洋構造物に対する影響および船舶の安全な航行を考慮する上で、潮流の流況を的確に把握することは極めて重要な問題である。しかし、沿岸域や内湾における流速や水位の変動は複雑かつ早い。そのため、かなり密な観測を行わない限り現象を正しく捕らえる事は難しい。さらに、それら観測で得られたデータには、様々な要因によりもたらされる誤差が含まれている場合がある。本研究では、カルマンフィルタを用いて観測雑音を消去し、観測値を反映させた潮汐流の推定を行うものである。

2 基礎方程式

2.1 浅水長波方程式

潮汐流は次式の線形の浅水長波方程式により記述されるものと仮定する。

$$\dot{u}_i + g\eta_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\eta} + hu_{i,i} = 0 \quad (2)$$

ここで、 u_i はそれぞれ x, y 方向流速を、 η は、水位変動量を示す。 g は重力加速度、 h は水深である。境界 S は陸岸境界 S_1 開境界 S_2 となり、 S_1 上では法線方向流速を零に規定する条件を、また、 S_2 上では水位変動量 η を規定する。

$$u_i = \dot{u}_i \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$\eta = \dot{\eta} \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

2.2 有限要素方程式

流速および水位変動量に対して三角形一次要素による内挿補間関数を用い、ガラーキン法を適用すると、以下の有限要素方程式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta,i} + gH_{\alpha\beta i} \eta_{\beta} = 0 \quad (5)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_{\beta,i} + hH_{\alpha\beta i} u_{\beta i} = 0 \quad (6)$$

ここで、

$$M_{\alpha\beta} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta}) dV, \quad H_{\alpha\beta i} = \int_V (\Phi_{\alpha} \Phi_{\beta,i}) dV$$

時間方向の離散化に関しては、カルマンフィルタへの適用を考慮し陽的オイラー法を用いる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} u_{\beta i}^n - \Delta t g H_{\alpha\beta i} \eta_{\beta}^n \quad (7)$$

$$\bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^{n+1} = \bar{M}_{\alpha\beta} \eta_{\beta}^n - \Delta t h (H_{\alpha\beta i} u_{\beta i}^n) \quad (8)$$

ここで、 Δt は時間増分量、 n は時間ステップ $\bar{M}$ は集中化行列であり、混合行列 $\tilde{M}$ は、数値計算上の安定化のために用いられ、次のようなものである。

$$\tilde{M} = e\bar{M} + (1-e)M \quad e: \text{ランピングパラメータ}$$

3 カルマンフィルタ

3.1 状態空間モデル

カルマンフィルタの基礎方程式は以下の式により構成される。

$$x_{k+1} = Fx_k + Gw \quad (\text{システム方程式}) \quad (9)$$

$$y_k = Hx_k + v \quad (\text{観測方程式}) \quad (10)$$

ここで、 x は直接には観測できない状態ベクトル、 F は状態遷移行列、 H は観測行列、 y は観測雑音を含む観測値からなる観測値ベクトル、そして w, v はそれぞれシステム雑音 観測雑音を意味する。

3.2 仮定

カルマンフィルタの理論を導く際に、次のようなことを仮定する。

(仮定 1) システム雑音、観測雑音はつぎのような特徴を持つものとする。

$$E\{w_k\} = 0, \quad \text{cov}\{w_k, w_j\} = E\{w_k w_j^T\} = Q\delta_{kj} \quad (11)$$

$$E\{v_k\} = 0, \quad \text{cov}\{v_k, v_j\} = E\{v_k v_j^T\} = R\delta_{kj} \quad (12)$$

ここで、 $E\{\cdot\}$ は期待値、 δ はクロネッカーのデルタである。雑音は白色雑音とし、相互無相関であると仮定する。

(仮定 2) 最適推定値 $\hat{x}_k$ は観測値 $Y_k = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ が与えられたときの条件付き平均値である。

$$\hat{x}_k = E\{x_k | Y_k\} \quad (13)$$

(仮定 3) 全ての過程は正規分布に従う。これにより次式が導かれる。

$$\Gamma_k = \text{cov}\{x_k | Y_{k-1}\} = E\{(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T\} \quad (14)$$

$$x_k^* = E\{x_k | Y_{k-1}\} \quad (15)$$

$$\Gamma_k^* = \text{cov}\{x_k | Y_{k-1}\} = E\{(x_k - \hat{x}_k^*)(x_k - \hat{x}_k^*)^T\} \quad (16)$$

ここで、上付き添字*は、 $(k-1)$ 時間での観測値を用いた k 時間での値である。また、 Γ は分散を表す。

3.3 定式化

仮定より、式(13)-(16)は確率密度関数を用いることで次のように表すことができる。

$$p(x_k|Y_k) = N(\hat{x}_k, P_k) \quad (17)$$

$$p(y_k|x_k) = N(Hx_k, R) \quad (18)$$

$$p(Y_k|Y_{k-1}) = N(Hx_k^*, H\Gamma_k^* H^T + R) \quad (19)$$

$$p(x_k|Y_{k-1}) = N(x_k^*, P_k^*) \quad (20)$$

ここで、ベイズの定理を適用すると、状態量 x の平均値 $\bar{x}$ および 誤差共分散 P の推移は以下のようになる。

$$\bar{x}_{k+1} = F\bar{x}_k + Gw = F\bar{x}_k \quad (21)$$

$$P_{k+1} = (\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})(\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})^T \quad (22)$$

最適推定値 $\hat{x}_k$ と推定誤差共分散は以下のようになる。

$$\hat{x}_k = x_k^* + P_k H_k R_k^{-1} (y_k - H_k x_k^*) \quad (23)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) \Gamma_k (I - H_k^T K_k^T) + K_k R_k K_k^T \quad (24)$$

ここで、 K はカルマンゲインと呼ばれるもので、各節点に対する観測点データの重み付けを表すものであり、以下のように示される。

$$K_k = \Gamma_k H_k^T (R_k + H_k \Gamma_k H_k^T)^{-1} \quad (25)$$

4 数値解析例

本手法の有効性を示すために、数値解析例を示す。房総半島周辺海域を対象とした領域について解析をおこなった。(図.1)は房総半島周辺の海域を対象とした有限要素分割で、観測点 および推定点を示す。これらの点は気象庁により管理される検潮所であることから、観測値は、気象庁により算出される M_2, S_2, O_1, K_1 の各分潮値より計算した値を用いた。(図.2) Γ_0 G は共に、 $1.0I$ とし、 R 、 Q を、それぞれ 0.0001 、 1.0×10^{-4} とした。(表.1)は、計算における各定数値を示す。

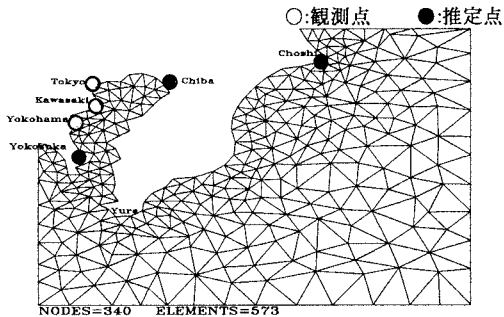


図 1:有限要素分割図

表.1 定数値

計算回数	50000
dt	5.0[sec]
ランピングパラメータ e	0.8

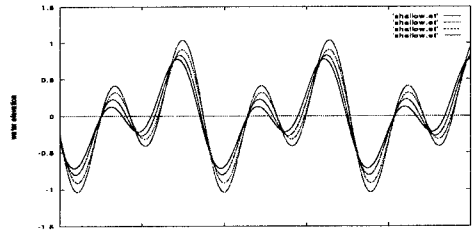


図 2:観測値 (水位変動量)

(図.3-5)において、破線は調和定数もちいて計算された値を、実線はカルマンフィルタにより推定された値を示す。

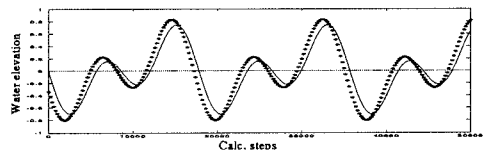


図 3:推定結果 (千葉)

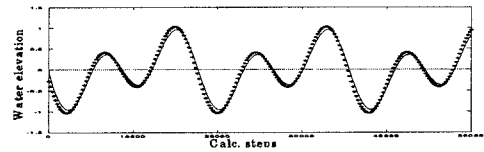


図 4:推定結果 (銚子)

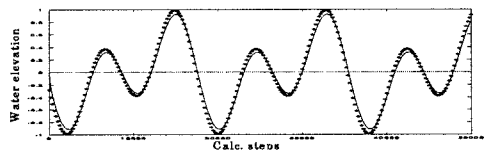


図 5:推定結果 (横須賀)

5 おわりに

本研究では、潮流の流況推定に対するカルマンフィルタの有効性について検討をおこなった。的確な推定値を得るためには、位相差をより大きくするような観測点の選択が必要である。しかし、現実問題として、観測点選択に対する自由度は低いことから、拡張カルマンフィルタ等の手法により推定された振幅や位相差の値を準観測値として用いて状態量の推定をおこなうのが有効であろう。また、状態量を直接的に推定する場合、解析領域の拡大に伴い、各行列の次元は必然的に高くなり、多くの計算時間を必要とする。それゆえに、次元および計算時間低減に対して、*Reduced-Order Kalman Filter*等の手法の検討が必要であると考えられる。

参考文献

- [1] 片山 徹., "応用カルマンフィルタ" 朝倉書店,1983.
- [2] Andrew P. Sage Chelsea C. White, "Optimum systems control" Second edition Prentice-Hall,Inc,1977