土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

# Ⅱ－301　非線形 Burgers 方程式への有限解析法の適用について

大阪大学客員研究員 崔　成烈　大阪大学工学部　○中辻啓二
延世大学校工科大学 趙　元喆　延世大学校工科大学 李　元煥

## １．まえがき

数値計算を実行する上で種々のレベルで介入してくる数値誤差の適切な処理、あるいはその程度の認識が必要であることは言うまでもない。第二著者はすでに1973年の土木学会論文集においてそのことを指摘するとともに、誤差論から有限差分法から有限要素法へと関心が変わっていった経験を持つ。しかしながら、今なお事新しく議論されるのはなぜだろうか？ 朋友の Falconer教授はパソコンという記憶容量や計算時間が拘束される条件下での流動計算においてはアルゴリズムそのものの精度向上が必要であるという。しかし、それが複雑化するほど境界の取り扱いが煩雑になり、３次元流動場への展開が難しくなることは事実である。誤差の認識は必要であるが、いたずらにプログラミングを煩雑化するよりも、高性能の機種を購入して可能な限り離散化間隔を小さくとり、時間をかけて計算を行って物理現象の解明を追求する姿勢の方が工学であるというのが、第二著者の見解である。拡散係数や乱流モデルの取り扱いも然りである。

このような見識であることから、数値解析法の議論よりも、むしろ物理現象の新たな発見を目指して数値実験を志向してきた。しかしながら、韓国延世大学校の研究者との議論の中で、Chenら(1981)の有限解析法(Ｆinite Analytic Method) が話題になり、興味を覚えた。そこで非線形ながら解析解を有する Burgers方程式を選んで幾つかの有限差分法(ＦＤＭ)との比較を討議する機会を得たので、その結果を報告する。

## ２．ＦＡＭとは？

ＦＡＭの概略は有限要素法（ＦＥＭ）とよく似ている。計算領域を数多くの有限要素に分割して、その要素内の流動も基礎方程式を満足するように数値解を求める点では同じである。しかし、ＦＥＭでは有限要素の各格子点で近似解を与えて、一次関数あるいは二次関数で補完して偏微分方程式を近似したときの誤差が全計算領域で最小になるように近似解を解析解に近づくように算出する。これに対して、ＦＡＭは基礎方程式を各有限要素にも合てはめることに違いがある。しかし、非線形の Navier-Stokes方程式では無理が生じる。そこで、代数的表現に書き直した定常、線形、移流拡散方程式を解析解として導入することになる。要素が小さければ小さいほど、近似の精度は向上する。

一方、ＦＤＭは微分方程式の各微分商をTaylor級数展開して差分商に変換したものを離散化した格子点での値で表現する。したがって、切断誤差が必然的に発生する。とくに、移流項の誤差が物理現象としての拡散の表現と同じになるからやっかいである。また、３次微分商は波動の曲率を増幅する作用も及ぼすことになり、この点に関しても注意が必要である。つまり、ＦＤＭに現れる誤差の問題はＦＡＭあるいはＦＤＭのそれとは異なる。

## ３．検討内容

つぎに示す一次元非線形 Burgers 方程式を階段状の初期条件で計算した。その解は図－１に示す。

$$U_t + U \cdot U_x = \alpha U_{xx} \qquad \text{for } U(x,0)=U_0 \quad -\infty < x \leq 0 \text{ and } U(x,0)=0 \quad 0< x < \infty,$$
$$\text{for } U(-\infty, t)=U_0 \quad 0< t \text{ and } U(\infty, t)=0 \quad 0< t.$$

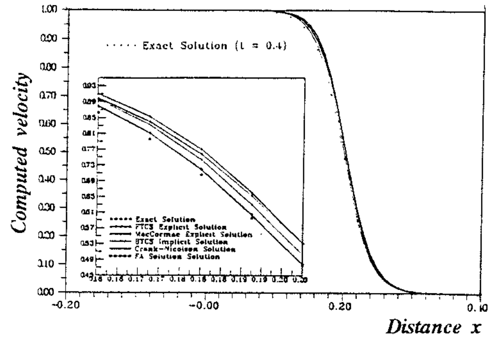
ＦＡＭとの比較のために、Ｆorword-Ｔime & Ｃenteral-Ｓpace法、MaＣormack法の陽解法と、Ｂackword-Ｔime & Ｃenteral-Ｓpace法、Ｃrank-Ｎicolson法の陰解法を選択した。比較の基準は同じ条件下での数値解と解析解との差異がどの程度であるか？　数値解に振動現象が発生するか否か？で評価した。

## ４．解析結果とその考察

解析解と数値解との比較を表－１に示す。収束条件を $\mathrm{Max}[U_{com}\ U] < 10^{-5} \sim 10^{-7}$ とした時の収束に要する計算回数を示している。表中のＤＩとＮＥは、それぞれ解が発散した場合と、収斂するが計算回数が２万回

表－１　各数値解法の収束性の比較

| Stability Criteria | Schemes | F＝UΔｔ/Δｘ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.025 | 0.125 | 0.25 | 1.25 | 2.50 |
| $\varepsilon_1=10^{-5}$ | FTCS | 4713 | 1203 | 656 | DI | DI |
| | MC | 4991 | 1272 | 695 | DI | DI |
| | BTCS | 5000 | 1278 | 701 | 173 | 96 |
| | C-N | 4997 | 1274 | 697 | 168 | 91 |
| | FAM | 4994 | 1272 | 696 | 171 | 91 |
| $\varepsilon_2=10^{-7}$ | FTCS | NE | NE | NE | DI | DI |
| | MC | NE | NE | NE | DI | DI |
| | BTCS | NE | NE | NE | NE | NE |
| | C-N | NE | NE | NE | NE | NE |
| | FAM | NE | 1706 | 854 | 175 | 91 |
| Reference | Δｘ＝0.005,　$\alpha=1$ | | | | | |

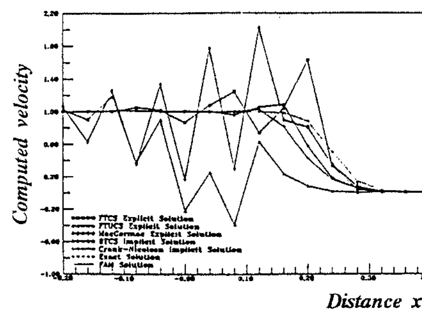


図－１　解析解と各数値解法の解との比較

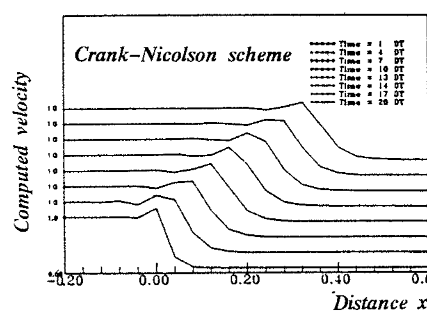
でも上記条件を満たさない場合を示す。同表からＦＡＭの優位性は明白である。とくに、Ｆ＝ＵΔｔ/Δｘで定義されるＣＦＬ条件が１を大きく上回った計算においても安定しているのは特筆に値する。

また、非定常状態の解析解と 0.4時間後の数値解とを比較したのが図－１である。拡大図よりＦＡＭによる数値解と解析解とがほとんど一致しているのに対して、ＦＤＭではＢＴＣＳのみが満足な近似を示していることが確認される。

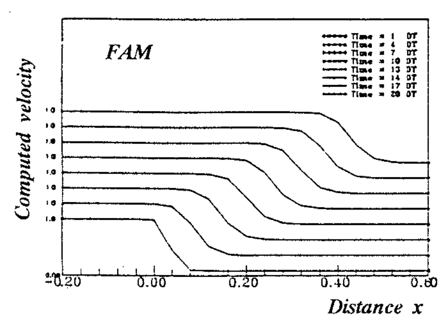
ＦＡＭでは要素内でも偏微分方程式を解析的に解いているため、ＦＤＭが持っている位相誤差やそれに関連する不安定性（振動）を有しない特徴がある。この事を確認するために時間間隔を増して局部 Reynolds数が安定領域を越す（Ｒｅ＞２）場合に数値的不安定が発生するか否かを確認したのが、図-２～図-４である。図-２は計算の開始後 0.48秒が経過した時の結果を示す。点線で表示した解析解と(＋)で表示したＦＡＭの数値解解は諸条件に無関係に一致するのに反して、ＦＤＭは陽解法や陰解法を問わず波形の振動現象が発生している。図－３と図-４はＣ－ＮとＦＡＭによる数値解の時間変化を示した。



図－２　数値解の振動性の比較



図－３　Ｃ－Ｎ による数値解



図－４　ＦＡＭによる数値解

５．あとがき

ＦＡＭ(有限解析法）のアルゴリズムならびに精度を考察することを目的に、非線形 Burger 方程式への適用を試み、また各種有限差分法の数値解との比較を検討を実施した。その結果、ＦＡＭの優位性を確認することができた。

参考文献：

(1) 村岡・中辻(1973)：土木学会論文報告集、213, 7-16.
(2) 村岡・中辻(1974)：第18回水理講演会講演集, 61-66.
(3) R.A. Falconer(1995): Personal Communication.
(4) Chen. C,J.ら (1981): Numerical Heat Transfor, 4, 179-197.