

II - 299

東京湾における浅水長波方程式のパラメータと入射波振幅の同定

○ 中央大学 学員 蜜石 一太
中央大学 正員 川原 陸人

1 はじめに

海洋現象を解析する際、数値解析には浅水長波方程式がよく用いられる。その運動方程式には、エネルギーの減衰係数である渦動粘性係数と海底摩擦係数が含まれており、流れの挙動に少なからず影響を与えている。また潮流解析を行う際、開境界において入射波を与えなければならない。周期や遅角の値は、開境界付近の観測値の潮位表より採用することができるが、しかしながら振幅については、決定することは困難である。そこで海洋現象を解析するに至り、その減衰係数と振幅を求める必要がある。そこで本研究では、減衰係数と振幅の同定を、共役勾配法の一種である Fletcher-Reeves 法を用いて行うものとする。この方法は、アルゴリズムが比較的簡単で大規模計算に適していると考え適用した。

2 基礎方程式

2次元の非線形浅水長波方程式を総和規約を用いると以下のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + g \eta_{,i} - \nu (u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \frac{\tau}{H} (u_k u_k)^{\frac{1}{2}} u_i = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \{(h + \eta) u_i\}_{,i} = 0 \quad (2)$$

ここで u_i , g , η , ν , τ , H , h はそれぞれ x_i ($i=1,2$) 軸方向の平均流速、重力加速度、水位変動量、渦動粘性係数、海底摩擦係数、各要素内における平均水深そして水深を表す。

3 有限要素方程式

(1),(2) 式を重み付き残差方程式に変形し、三角形一次の内挿関数を仮定し、ガレルキン法を適用して有限要素方程式を導くと以下のようになる。

$$M_{\alpha\beta} \dot{u}_{\beta i} + K_{\alpha\beta\gamma j} u_{\beta j} u_{\gamma i} + g H_{\alpha\beta i} \eta_{\beta} + \nu L_{\alpha j \beta j} u_{\beta j} + \nu N_{\alpha j \beta i} u_{\beta j} + I_{\alpha\beta} \frac{\tau}{H} (u_{\beta k} u_{\beta k})^{\frac{1}{2}} u_{\beta i} = \sum_{\alpha i} \quad (3)$$

$$M_{\alpha\beta} \dot{\eta}_{\beta} + B_{\alpha\beta\gamma i} (h_{\beta} + \eta_{\beta}) u_{\gamma i} + C_{\alpha\beta\gamma i} (h_{\beta} + \eta_{\beta}) u_{\gamma i} = 0 \quad (4)$$

なお時間方向に対する離散化は、2段階陽解法を適用する。

4 パラメータ同定

本研究では、共役勾配法でパラメータ同定を行なう。

4.1 評価関数

評価関数は、水位変動量の観測値と計算値の残差の平方和で以下のように表す。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{\bar{\eta}_{\mu}(t) - \eta_{\mu}(t)\}^T [S] \{\bar{\eta}_{\mu}(t) - \eta_{\mu}(t)\} dt \quad (5)$$

ここで、 $\bar{\eta}_{\mu}$ は観測点 μ における水位変動量の観測値、 η_{μ} はその点に対する水位変動量の計算値を表す。また $[S]$ は重み行列を表し、本研究においては単位行列とした。

4.2 感度行列

本研究では、共役勾配法を用いる為、感度行列を求める必要がある。そこで、(3),(4) 式を各パラメータで偏微分し、それを時間方向に離散化 (2段階陽解法) することにより感度行列は求めることができる。

4.3 ステップ幅 α

d を探索方向とするとステップ幅 α は、評価関数 $J(\nu + \alpha d)$ を最小にする α である。本研究では直線探索法の一種である放物線近似法で求めた。

4.4 アルゴリズム

渦動粘性係数を同定するためのアルゴリズムを以下に示す。

1. 初期値 ν^0 と収束判定数 ε を与える。 ($i=0$)
2. 水位 $\eta_{\mu}^0(\nu^0, t)$, 感度 $\frac{\partial \eta_{\mu}^0}{\partial \nu}$ および評価関数 $J(\nu^0)$ を計算。
3. $\frac{\partial J(\nu^0)}{\partial \nu}$ を計算し、 $d^0 = -\frac{\partial J(\nu^0)}{\partial \nu}$ と設定。
4. $J(\nu^i + \alpha^i \cdot d^i)$ が最小となる α^i を求める。
5. 新しいパラメータを $\nu^{i+1} = \nu^i + \alpha^i \cdot d^i$ により計算。
6. 水位 $\eta_{\mu}^{i+1}(\nu^{i+1}, t)$, 感度 $\frac{\partial \eta_{\mu}^{i+1}}{\partial \nu}$ を求め、評価関数 $J(\nu^{i+1})$ を計算。
7. $|J(\nu^{i+1}) - J(\nu^i)| < \varepsilon$ ならば終了、でなければ次のステップへ。
8. 勾配 β^i を計算。
9. $d^{i+1} = -\frac{\partial J(\nu^{i+1})}{\partial \nu} + \beta^i \cdot d^i$ を計算。
10. 繰り返し回数を $i = i + 1$ として4へ戻る。

海底摩擦係数、振幅の場合も同様に行なう。

5 東京湾での解析結果

数値解析例として、東京湾における解析を行なう。Fig.1は東京湾の有限要素分割図（節点数 685、要素数 1216）と観測地点、Fig.2はパラメータ領域分割図を示す。domain 1は水深 0m~15mで、domain 2は水深 15m~で分割。初期条件として $t = 0$ のとき $u = v = \eta = 0$ とした。数値計算には、 $\Delta t = 15\text{sec}$ 、ランピングパラメータ $e = 0.9$ 、収束判定数 $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$ を用いた。



Fig.1 有限要素分割図

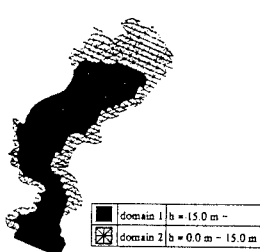


Fig.2 領域分割図

まず初めに減衰係数の同定を行う。流入条件として開境界に振幅 0.42m、周期 12.42 時間の正弦波を与え、陸岸条件では完全反射の条件を適用する。入射波の振幅 0.42m は、開境界付近の観測データをもとに値を決めた。

減衰係数を同定する際、2つのパラメータを同時に同定することは非常に困難であるので、まず渦動粘性係数を固定して海底摩擦係数を同定し、さらに同定された海底摩擦係数を固定して渦動粘性係数を同定する方法をおこなった。各領域に渦動粘性係数 ($\nu_1 = 100.0\text{m}^2/\text{s}$, $\nu_2 = 500.0\text{m}^2/\text{s}$) を与えて固定し、 $\tau_1 = \tau_2 = 0.0$ を初期値として海底摩擦係数を同定。ここで、海底摩擦係数の収束状況を Fig.3 に示す。次に、同定された海底摩擦係数 ($\tau_1 = 0.0013$, $\tau_2 = 0.0168$) を固定し、 $\nu_1 = \nu_2 = 0.0$ を初期値として渦動粘性係数を同定。渦動粘性係数の収束状況を Fig.4 に示す。Fig.5 は、横須賀と富津における同定されたパラメータを用いた順解析結果と観測データを比較したものである。

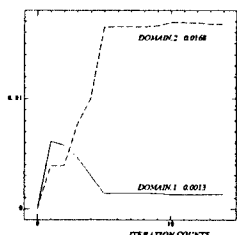


Fig.3 海底摩擦係数の収束状況

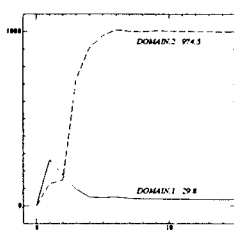


Fig.4 渦動粘性係数の収束状況

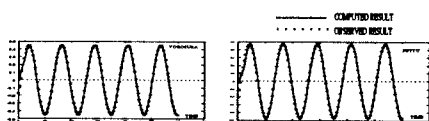


Fig.5 順解析結果と観測データの比較

次に同定された減衰係数に幅をもたせて各パラメータの値として、入射波振幅の同定を行う。渦動粘性係数は ($\nu_1 = 50.0\text{m}^2/\text{s}$, $\nu_2 = 800\text{m}^2/\text{s}$) を与え、海底摩擦係数は ($\tau_1 = 0.005\text{m}^2/\text{s}$, $\tau_2 = 0.05\text{m}^2/\text{s}$) を与える。振幅の初期値は、 $\text{amp} = 0.01\text{m}$ とした。ここで、入射波振幅の収束状況を Fig.6 に、評価関数の収束状況を Fig.7 に示す。Fig.8 は、横須賀と富津における同定された入射波振幅を用いた順解析結果と観測データを比較したものである。

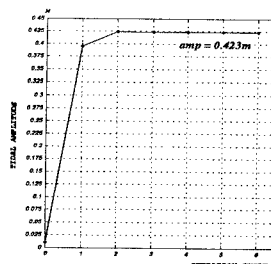


Fig.6 入射波振幅の収束状況

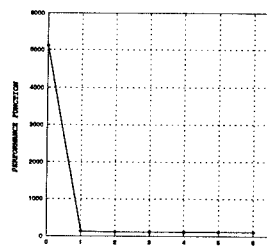


Fig.7 評価関数の収束状況

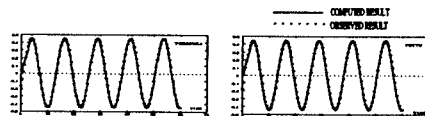


Fig.8 順解析結果と観測データの比較

6 おわりに

Fig.5 より、減衰係数の同定結果はまずまずのものが得られたと思われる。また入射波振幅の同定結果も、減衰係数の値に幅をもたせたにもかかわらず、 $\text{amp} = 0.42$ に近い値が得られた。その結果振幅の同定結果は、減衰係数の値に余り依存しないことがわかった。しかしながら減衰係数の同定値は振幅の値に依存するので、減衰係数を同定する際の振幅の値の取り方が重要になってくる。そこで今後その辺りを検討していきたい。また今回は領域分割を2領域で行ってきたが、今後3、4領域に増やしていき、その同定結果を比較していきたい。

参考文献

- [1] K.Matsumoto and M.Kawahara: Parameter Identification of Bottom Friction and Eddy Viscosity of Tidal Flow in Tokyo Bay, 1993
- [2] R.Goda and M.Kawahara: A Fundamental Study for Parameter Identification of Tidal Flow, 1992
- [3] 児玉敏雄: 浅水長波方程式の有限要素解析とその応用に関する研究、佐藤工業（株）技術研究所報別冊、p162-p173、1992
- [4] 嘉納秀明: システムの最適理論と最適化、p53-p86、コロナ社
- [5] 服部昌太郎: 海岸工学、p13-p122、コロナ社