

II-298

傾斜水路模型の陰、陽形式重み付差分法潮流解析

九州産業大学 正員○加納正道 東和大学 正員 空閑幸雄
九州産業大学 正員 赤坂順三 九州産業大学 久田見幸周

1. まえがき 筆者らは[文献1]で、2次元浅海流方程式において粘性項を無視した移流項のみの基礎式(1)で解析を行うことを考え、式(1)の陽形式重み付差分式の定め方及び、図1の傾斜水路模型実験結果の一部を示した。本報では陽形式重み付差分法(WFDM)の解析結果を示すとともに、陽形式では時間ステップを小さくとらなければ解が発散する欠点を補うために、時間ステップを比較的大きくできる陰形式重み付差分式を示す。

2. 基礎方程式 潮流の基礎方程式は、3次元Reynolds方程式を水底から水面まで積分して鉛直方向の平均値として表示した2次元浅海流方程式(式(1)にx方向のみ示す)及び連続の式(2)とする。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{M}{H+\zeta} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{N}{H+\zeta} \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\gamma_b^2}{(H+\zeta)^2} M \sqrt{M^2 + N^2} - g(H+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{M}{H+\zeta} = m, \quad \frac{N}{H+\zeta} = n \quad (3)$$

ここに、 $M=U(H+\zeta)$ 、 $N=V(H+\zeta)$ は各々x、y方向の線流量、U、Vはx、y方向の平均流速、 ζ は水面の平均水面(H)からの高さ、gは重力の加速度、 γ_b は水底における摩擦係数であり、コリオリ力および粘性項は無視している。

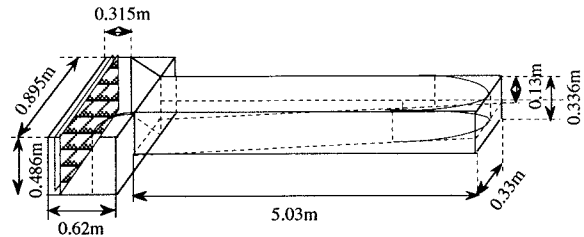


図1 水理模型装置

3. 多段階陰形式WFDMの定め方

WFDMでMに関する浅海流方程式を解析する方法について述べよう。式(3)は前の時間のMを与える既知項とする。式(4)は求めようとするMを含むが、式(3)同様前の時間のMを与えると、Mとは独立に求められる非同次項とみなし式(5)の非同次形の浅海流方程式とみなすことができる。式(5)をWFDMで解くためにまず、右辺を0として得られる同次形浅海流方程式を図2に示す5点5種類(重みa)の陰形式差分モデルを用いて重み $a_1 \sim a_5$ を求める。同次形浅海流方程式を満足

$$-\frac{\gamma_b^2}{(H+\zeta)^2} M \sqrt{M^2 + N^2} - g(H+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = F \quad (4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + m \frac{\partial M}{\partial x} + n \frac{\partial M}{\partial y} = F \quad (5)$$

$$M(i, j, \ell) = a_1 \cdot M(i, j+1, \ell) + a_2 \cdot M(i, j-1, \ell) + a_3 \cdot M(i, j, \ell-2) + a_4 \cdot M(i, j+1, \ell-2) + a_5 \cdot M(i, j-1, \ell-2) \quad (6)$$

$$M^{(r)}(x, y, t) = \sum_{i=0}^r \left\{ \frac{(x-mt)^i + (y-nt)^j}{i!} \right\} \quad (7)$$

する多項式(7)において $r=0 \sim 4$ とにおいて得られるMの値を同次形重み付差分式(6)に代入して得られた連立方程式(8)を解けばよい。次に、非同次形浅海流方程式(5)を満たすように、図2に示す10点10種類(重みa,b)の多段階陰形式差分モデルを考えると、非同次形重み付差分式(9)を得る。原点を考える点に移し、式(5)を満たす M_L と F_L の組み合わせた多項式(10)において、 $L=1 \sim 5$ とにおいて得られるM、Fの値と式(8)より求めた $a_1 \sim a_5$ の値を、式(9)に代入した連立方程式(本報では省略)を解けば重み

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \beta & -\beta & -C_x - C_y & -C_x + \beta - C_y & -C_x - \beta - C_y \\
 \beta^2 + \frac{2\beta}{h} & \beta^2 - \frac{2\beta}{h} & C_x^2 + C_y^2 + \frac{2}{h}(-C_x - C_y) & C_x^2 + (\beta - C_y)^2 + \frac{2}{h}(-C_x + (\beta - C_y)) & C_x^2 + (-\beta - C_y)^2 + \frac{2}{h}(-C_x + (-\beta - C_y)) \\
 \beta^3 + \frac{3}{h}(\beta^2 + \frac{2\beta}{h}) & -\beta^3 + \frac{3}{h}(\beta^2 - \frac{2\beta}{h}) & -C_x^3 - C_y^3 + \frac{3}{h}[C_x^2 + C_y^2 + \frac{2}{h}(-C_x - C_y)] & -C_x^3 + (\beta - C_y)^3 + \frac{3}{h}[C_x^2 + (\beta - C_y)^2 + \frac{2}{h}(-C_x + (\beta - C_y))] & -C_x^3 + (-\beta - C_y)^3 + \frac{3}{h}[C_x^2 + (-\beta - C_y)^2 + \frac{2}{h}(-C_x + (-\beta - C_y))] \\
 \beta^4 + \frac{4}{h}(\beta^3 + \frac{3}{h}(\beta^2 + \frac{2\beta}{h})) & -\beta^4 + \frac{4}{h}(-\beta^3 + \frac{3}{h}(\beta^2 - \frac{2\beta}{h})) & C_x^4 + C_y^4 + \frac{4}{h}[-C_x^3 - C_y^3 + \frac{3}{h}(C_x^2 + C_y^2 + \frac{2}{h}(-C_x - C_y))] & C_x^4 + (\beta - C_y)^4 + \frac{4}{h}[-C_x^3 + (\beta - C_y)^3 + \frac{3}{h}(C_x^2 + (\beta - C_y)^2 + \frac{2}{h}(-C_x + (\beta - C_y)))] & C_x^4 + (-\beta - C_y)^4 + \frac{4}{h}[-C_x^3 + (-\beta - C_y)^3 + \frac{3}{h}(C_x^2 + (-\beta - C_y)^2 + \frac{2}{h}(-C_x + (-\beta - C_y)))]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
 \end{bmatrix} \quad (8)$$

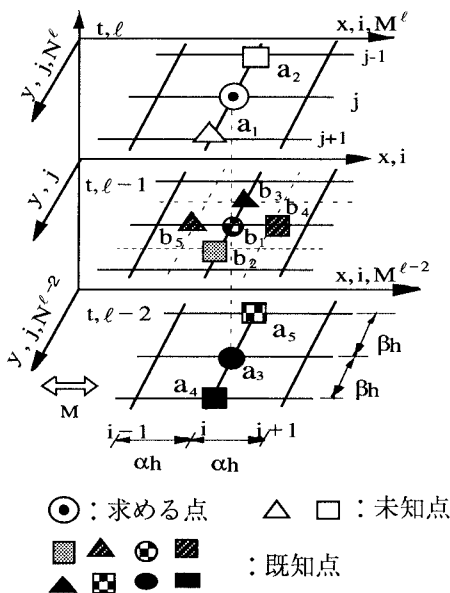


図2 多段階陰形式差分モデル

$b_1 \sim b_5$ が求まり、 M に関する浅海流方程式解析用のWFDMが定まる。連続の式は式(11)で示す従来の差分法で解く。

4.むすび 陰形式WFDM解は現在計算中である。ここでは陽形式WFDM解¹⁾による解析結果の一部をトレーサー実測値、電磁流速計測定値、従来の差分解と共に図3に示す。これらの結果によれば、陽形式WFDM解は、従来の差分解が過小な値を与えるの

に比して、流速計測定値およびトレーサー実測値にほぼ等しい値を示している。即ちWFDMは従来の差分法に比べ傾斜水路における往復流を精度良く解析できている。

参考文献 1) 空閑、加納、赤坂：傾斜水路模型による潮流解析、平成6年度西部支部講演概要集

$$\begin{aligned}
 M(i, j, \ell) = & a_1 \cdot M(i, j, \ell) + \dots + a_5 \cdot M(i, j-1, \ell-2) \\
 & + b_1 \cdot F(i, j, \ell-1) + b_2 \cdot F\left(i, j+\frac{1}{2}, \ell-1\right) \\
 & + b_3 \cdot F\left(i, j-\frac{1}{2}, \ell-1\right) + b_4 \cdot F\left(i+\frac{1}{2}, j, \ell-1\right) \\
 & + b_5 \cdot F\left(i-\frac{1}{2}, j, \ell-1\right)
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 M_L = & \sum_{i=0}^{L-1} \left\{ \frac{(x-mt)^i + (y-nt)^i}{i!} \right\} \cdot t + \frac{(x-nt)^L + (y-nt)^L}{L!} \\
 F_L = & \sum_{i=1}^L \left\{ \frac{(x-mt)^{i-1} + (y-nt)^{i-1}}{(i-1)!} \right\}
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 (\zeta_{i,j}^{\ell-1} - \zeta_{i,j}^{\ell-3}) / 2\Delta t = & -(M_{i+1,j}^{\ell-2} - M_{i,j}^{\ell-2}) / \Delta x \\
 & - (N_{i,j+1}^{\ell-2} - N_{i,j}^{\ell-2}) / \Delta y
 \end{aligned} \quad (11)$$

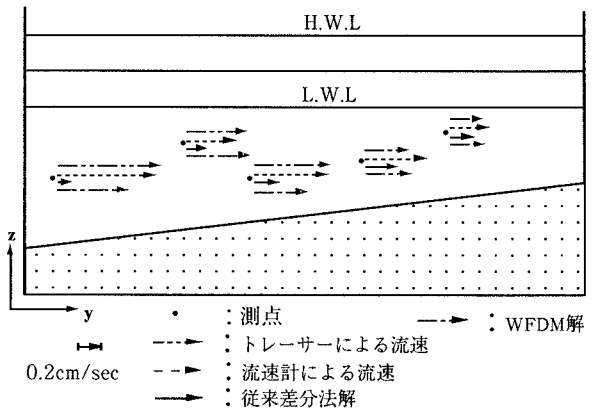


図3 水理模型実験・数値解析による流向・流速