II-296 最適制御理論を用いたダム水門操作による洪水制御問題

○ 中央大学　学員　照井太一
（株）東京電力　正員　佐々木建一
中央大学　正員　川原睦人

1 はじめに

現在、我国では発電、洪水調節、灌漑などの目的で多くのダムが開発、建設されている。多目的ダムのような複数の異なる目的でダムが機能するためには従来のように過去の経験やデータに重点を置く方法ではなく、降雨量から洪水波形を予測し、それに対応する適切な操作で放流する必要がある。
本研究では最適制御理論を導入し、貯水池内での水位変動量を小さくするような最適な放流量を求める。水理モデルとして浅水長波方程式を、数値解析手法として有限要素法を用いる。

2 基礎方程式

貯水池内の水面の挙動を表すのに、線形の浅水長波方程式を用いる。

$$\dot{q}_i + gh\zeta_{,i} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = 0 \tag{2}$$

ここで、q :単位幅流量、ζ :水位変動量、g :重力加速度、h :水深を表す。

3 有限要素方程式

ガレルキン法により、任意の三角形一次元要素について重み付き残差方程式を導き、内挿補間し、それらを全体形に重ね合わせ、有限要素方程式は補間関数を用いて、$Eq.(3)$ のようにあらわされる。

$$[M]\{\dot{\mathrm{x}}\} + [H]\{\mathrm{x}\} = \{0\} \tag{3}$$

$$\{\mathrm{x}\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ \zeta \end{Bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_{\alpha\beta}] & & \\ & [M_{\alpha\beta}] & \\ & & [M_{\alpha\beta}] \end{bmatrix}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} & & gh[S_{\alpha\beta x}] \\ & & gh[S_{\alpha\beta y}] \\ [S_{\alpha\beta x}] & [S_{\alpha\beta y}] & \end{bmatrix}$$

$$[M_{\alpha\beta}] = \int_\Omega (\Phi_\alpha \Phi_\beta) d\Omega \qquad [S_{\alpha\beta i}] = \int_\Omega (\Phi_\alpha \Phi_{\beta,i}) d\Omega \tag{4}$$

Φ : 補間関数
時間方向の離散化には二段階陽解法を用いる。これにより解析時間を微小時間増分量で分割し、逐次時間ごとに流量と水位変動量を求める。

4 最適制御理論

最適制御問題とは、「状態変数と制御変数からなる微分方程式と評価関数が存在するときに、微分方程式を満足しつつ、評価関数を最小にするような最適な制御量を求めよ。」ということである。
微分方程式として、$Eq.(3)$ を状態量 $\{x\}$, 放流量 $\{u\}$, 洪水流量 $\{f\}$ を含む形に変形する。

$$\begin{aligned} \{\dot{\mathrm{x}}\} &= -[M]^{-1}[H]\{\mathrm{x}\} & (5) \\ &= [A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\} & (6) \end{aligned}$$

水位変動量を最小にするという目的より、評価関数はつぎのように設定する。

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (\{\zeta\}^T[Q]\{\zeta\} + \{u\}^T[R]\{u\}) dt \tag{7}$$

t_0 :始端時間、t_f :終端時間
微分方程式を付帯条件として評価関数を最小化するために、ラグランジュ乗数 $\{p\}$ を導入してハミルトン関数を定義する。

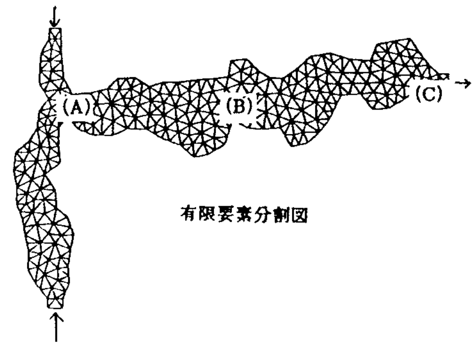
$$\begin{aligned} H &= -\tfrac{1}{2}(\{x\}^T[Q]\{x\} + \{u\}^T[R]\{u\}) \\ &\quad + \{p\}^T([A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\}) \end{aligned} \tag{8}$$

変分問題の最適性必要条件であるオイラー方程式によりラグランジュ乗数を求める。計算アルゴリズムとして共役勾配法を用い、ラグランジュ乗数を利用して操作量を修正しながら、評価関数を最小化していく。収束条件を満たすまで繰り返し計算を行い、最終的に最適な放流量が得られる。

5 数値計算例

寒河江ダムの貯水池は南北に約 3.1[km]、東西に約 4.1[km] という大きさである。Δt は 1.0[sec]、制御時間は 150[min]

である。初期条件はすべての節点において流量、水位変動量ともゼロである。ダムの西部において南北から２本の川がつながっっていて、そこから図１のような時間変化の洪水流量が流入すると仮定する。図２は水門での放流量を示している。実線は最適な放流量、点線は自然放流を表している。図３、４、５は、その２つの場合について、有限要素分割図中で示された点での水位変動量を示している。



有限要素分割図

6 結論

(c)においては予備放流の影響で1.0[m]程度水位が下がる。しかし全体的には制御の効果が表れている。今後の課題として、放流量に上限を設定し下流域への影響を考慮したモデルにしたい。

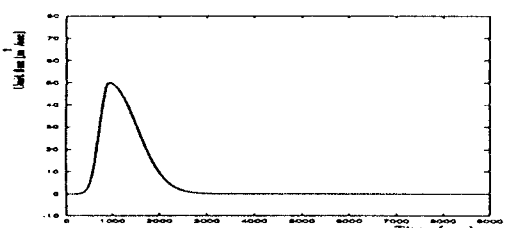


図 1: 流入流量

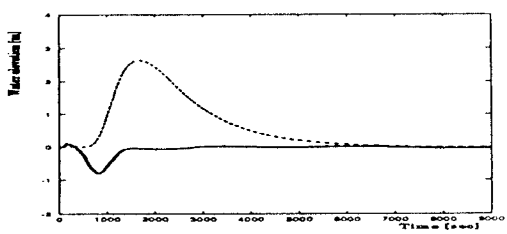


図 4: 水位変動量（B）

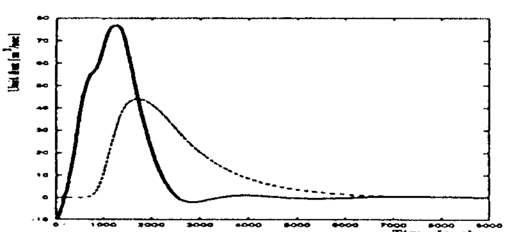


図 2: 放流量

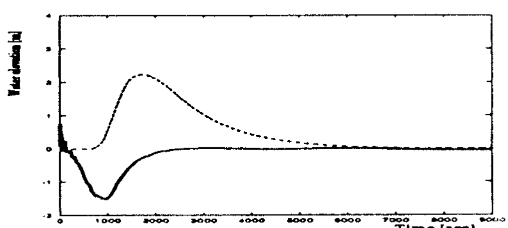


図 5: 水位変動量（C）

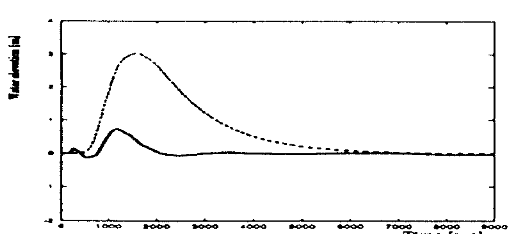


図 3: 水位変動量（A）

参考文献

[1] 嘉納秀明、システム最適理論と最適化、コロナ社、1987

[2] 嶋田芳朗　川原睦人、ダム放流量の制御解析に関する研究、中央大学土木工学科修士論文、1993

[3] 今井剛、最適制御法を用いた水質制御解析、中央大学土木工学科修士論文、1993