II －286

安定性理論に基づいた拡散モデルの安定解析

○中央大学　学員　藤野 剛
中央大学　正員　川原 睦人

1　はじめに

工学的には、システムが安定であることは、そのシステムの挙動を考えるうえでとても重要である。もしそのシステムの不安定性がある状態において確かめられのであれば、そのシステムの不安定な挙動を押さえることができる可能性もある。
本論では、２つの物質の関係をモデル化してその物質が拡散することを考えている。物質の１つは汚染物質である。この物質がある領域で発生したときに、それが消えるか、残るのかを安定問題として取り扱っている。安定問題に対して、リアプノフの安定理論に基づいて考察をする。

2　安定理論

本論では次式で表される工学的システムを考える。

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{1}$$

ただし、x は n 次元状態ベクトル、f は n 次元ベクトル、t は時間である。(1) のような多くのシステムは、局所的に次式で近似できる。

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

ただし、x は n 次元状態ベクトル、A は $n \times n$ 型 非特異定数マトリクスである。これは線形時不変システムを記述している。

固有値による解の考察　（２）式の線形時不変システムに対して、まず次の特性方程式から、固有値 λ_i を求める。

$$|A - \lambda_i I| = 0 \tag{3}$$

このうち異なった　λ_i の数がｊ個だったとすると、（２）の解は次のようにかける。

$$x_i = \sum_{k=1}^{j} b_{ik}\ exp(\lambda_k t) \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n) \tag{4}$$

ここで、システムが安定であるためには（４）式が指数関数であることから、実数マトリクスＡのすべての固有値の実数部が負の値であることが条件となる。

非線形システムに対する取り扱い　基本的定義によると、安定性は平衡点の近傍におけるシステムの性質だけに依存する。従って安定性の解析を行なうには、もとの非線形システムの代わりに平衡点の近傍でそのシステムの近似をするような、より単純な記述が用いられる。よって非線形システムに対しては線形化してその安定性を調べる。
非線形システム

$$\dot{x} = f(x) \tag{5}$$

に対して、

$$f(\overline{x} + y) = f(\overline{x}) + \frac{d}{dx} f(\overline{x}) y \tag{6}$$

と平衡点 $\overline{x}$ の近傍で線形化する。
n 次のシステムは、n 個の関数で定義される。そのベクトル表現は、

$$f(\overline{X} + Y) \simeq f(\overline{X}) + FY \tag{7}$$

となる。
この表現式において F は $n \times n$ の行列で、

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

と定義される。
この F に対して固有値による考察を行い、非線形システムに対する安定性を検討する。

3　解析モデル

本論では、次のような仮定をした数学モデルを考えている。
２つの物質 BOD(生物学的酸素要求量) と DO(容存酸素量) が存在する。BOD は DO が少ない時は DO の濃度に近似的に比例するが、DO が多くなると一定の飽和レベルに近づいていく。さらに BOD はある一定の割合で退化していく。次に BOD は BOD 自身の濃度に応じて DO を退化させる。さらに DO はある飽和濃度に達するように増加する。そして物質が拡散するものと考えると、次のような式で表すことができる。BOD と DO をそれぞれ　b 、c とすると、次のモデルが得られる。

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u\frac{\partial b}{\partial x} + v\frac{\partial b}{\partial y} - \kappa\left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right) = \frac{c}{c+K} b - Db + r_b \tag{8}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} - \kappa\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) = -\frac{c}{c+K} b - D(c_s - c) + r_c \tag{9}$$

ここで、c_s は酸素飽和濃度、K, D　は比例定数、κ は拡散係数、u, v は流速、r_b, r_c は物質の発生項を表す。

線形近似　安定解析を行うために、平衡点近傍において基礎方程式(8)(9)を線形近似する。線形近似した基礎方程式から式(7)のマトリクス F を次のように得る。

$$FY=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$A=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}-\kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{\overline{c}}{\overline{c}+K}-D$$
$$B=\frac{K\overline{b}}{(\overline{c}+K)^2}$$
$$C=\frac{\overline{c}}{\overline{c}+K}$$
$$D=u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}-\kappa\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)-(D+\frac{K\overline{b}}{(\overline{c}+K)^2})$$

ここで　$\overline{b},\overline{c}$ は平衡点である。

4　有限要素方程式

解析手法として有限要素法を適用し数値解析を行う。式(10)にガレルキン法を適用すると、次のような有限要素方程式が得られる。

$$FY=\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta b \\ \Delta c \end{bmatrix} \tag{11}$$

$\underline{A}= K^x_{\alpha\beta\gamma}u_\beta+K^y_{\alpha\beta\gamma}v_\beta+S_{\alpha\beta}+(\frac{\overline{c}}{\overline{c}+K}-D)M_{\alpha\beta}$
$\underline{B}= \frac{K\overline{b}}{(\overline{c}+K)^2}M_{\alpha\beta}$
$\underline{C}= \frac{\overline{c}}{\overline{c}+K}M_{\alpha\beta}$
$\underline{D}= K^x_{\alpha\beta\gamma}u_\beta+K^y_{\alpha\beta\gamma}v_\beta+S_{\alpha\beta}-(D+\frac{K\overline{b}}{(\overline{c}+K)^2})M_{\alpha\beta}$

このマトリクス F に対して安定解析を行う。なおこのマトリクスは有限要素法のマトリクスであるから、このままでは解を持たないため、境界条件にあたる行と列をこのマトリクスから抜いておく。

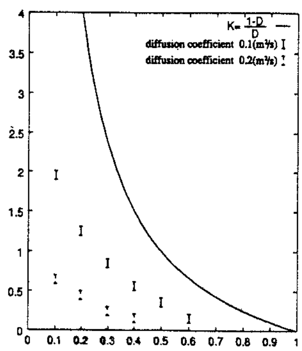
5　数値解析例

本論では、前節の基礎方程式の比例定数 K と Dを変化させてその比例定数の安定である範囲を求めた。平衡点は、$\overline{b}=0$, $\overline{c}=c_{sat}$ である。この状態は領域が全く汚れていない状態である。この状態に少量のBODが流入したものと考えて、BODが残るのか、残らないのかを考える。安定である場合は、きれいな状態になり、不安定な場合にはBODが残るものと考える。

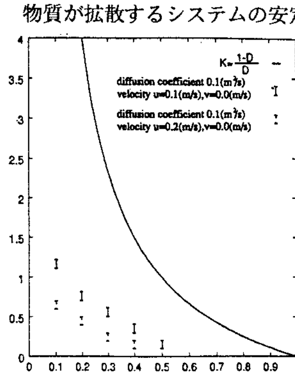
図1、図2の実線は移流も拡散もしない状態での安定の境界を示している。実線は、$K=\frac{1-D}{D}$ である。K と D を $K>\frac{1-D}{D}$ となるように定めると、この領域では、平衡点 $(\overline{b},\overline{c})=(0,c_s)$ の状態に戻る。しかし、K と D を $K<\frac{1-D}{D}$ となるように定めると、平衡点には戻らず、別の定常な点 $(b,c)=(c_s-\frac{KD}{1-D},\frac{KD}{1-D})$ に変わって、この領域にBODが残ってしまう。

図1に示す I 型のバーは、拡散する状態で安定から不安定に遷移する境界を示す。拡散係数は、$0.1(m^2/s)$ と $0.2(m^2/s)$ について調べている。図のように、拡散する状態は拡散しない状態より不安定な現象を起こす係数の範囲が狭くなる。これは、拡散する状態の方がよりきれいな状態に戻りやすいことを示す。また、拡散係数が大きいほどこの傾向は強い。

次に、図2のI型のバーは移流と拡散のあるシステムの安定の境界を示す。ここで、流速は $u=0.1(m/s),v=0.0(m/s)$ と $u=0.2(m/s),v=0.0(m/s)$ について、拡散係数を $\kappa=0.1(m^2/s)$ に固定して調べている。これを見るとわかるように、拡散効果だけのものよりさらに安定性を増している。また、流速の大きいほうが安定になることもわかる。



図－1　物質が拡散するシステムの安定性



図－2　物質が移流拡散するシステムの安定性

6　終わりに

本論では、BODとDOの関係に移流と拡散の効果を加えたモデルについて検討した。移流と拡散が安定性に関わることを数値的に求めることが出来た。物質の反応は、その領域の物質の密度に依存する。だから物質が拡散する方が安定性が増すと考えてよい。しかし、拡散を伴う反応の中には拡散効果により不安定現象を起こすものがある。今後は、この様なモデルに対して検討を行いたい。

参考文献

ペータC.ミュラー　著　　森　武宏　訳　：
安定性と行列　シュプリンガー.フェアラーク東京（株）