

京都大学大学院 学生員○門田章宏
京都大学工学部 正 員 橋津家久

1. はじめに

最近の乱流境界層に及ぼす圧力勾配の影響に関する研究では、 k - ϵ モデルに代表される乱流モデルを用いた数値計算の精度向上を目的として、剥離流れをも統一的に予測する壁法則を導入しようという試みがなされている。本研究においても、圧力勾配に大きく支配される不等流あるいは非定常開水路流れに適用できる壁法則について理論的検討を行う。その際、問題となるのは、ゼロ圧力勾配の2次元せん断流で適用されていた混合距離モデルがそのまま適用できるか?であり、これ如何によって導入される壁法則に対する考え方が変わってくる。本報告では、まずその問題点について乱れエネルギー輸送方程式より検討し、その後不等流あるいは非定常開水路流れに適用できる壁法則について考察する。

2. 圧力勾配下における混合距離理論の妥当性

壁面乱流に関する一次元化された乱れエネルギー輸送方程式は、一般に次式で表される。

$$-\frac{\partial J}{\partial y} + \tau \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \epsilon = 0, \quad \text{乱れの拡散率: } J = \rho \nu \left(\frac{1}{2} u_i u_i + \frac{p}{\rho} \right), \quad \text{逸散率: } \epsilon = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1)$$

Townsendは、 J を全せん断応力 τ の3/2乗に比例するとし、比例定数を圧力勾配の関数として実験的に評価した。この経験的な比例定数は平衡領域においてゼロ、剥離の初期離脱領域において正の有限値をとるため、広範囲の圧力勾配下では統一的に取り扱えない。しかし、剥離に限りなく近い逆圧力勾配に限って考えると、乱れの拡散率 J の表現にTownsendの3/2乗モデルが有効である。よって、次式で示される勾配拡散型および3/2乗モデルの両者を、それぞれ一定せん断層の存在する流れ、剥離を含む逆圧力勾配流れに対して考えることにする。なお、ここでは $k = 1/2 \cdot \overline{u_i u_i}$ とせん断応力 τ の局所相似性が仮定されている($C_\mu = 0.09$)。

$$J = -\frac{1}{\sigma_k} \left(\tau \frac{dU}{dy} \right) \frac{dk}{dy} = -\frac{\tau}{\sigma_k} \frac{dk}{dU} = -\frac{\tau}{\sigma_k C_\mu^{1/2} \rho} \frac{d\tau}{dU}, \quad J \propto \left(\frac{\tau}{\rho} \right)^{3/2} \quad (2)$$

ここで、 σ_k は乱れエネルギー k に関する有効プラントル数である。順圧力勾配からゼロ圧力勾配下の流れにおいては、一定せん断層の条件より $J=0$ の局所平衡関係を導き出すことができる。一方、剥離流れにおけるゼロ応力層では、 τ が U の2乗に比例する($\tau = \rho(\kappa_0 U/2)^2$)ことから $J = -\rho \kappa_0 / \sigma_k C_\mu^{1/2} \cdot (\tau/\rho)^{3/2}$ といったTownsendのモデルが導出され、勾配拡散型モデルが式(2)で表される二つの J の表現を包含していることになる。これらの圧力勾配下における関係を式(1)に代入し、乱れの発生率 $\tau dU/dy$ と逸散率 $\rho \epsilon$ との関係を上記二つの条件を一括して式(3)で表すことができ、この結果乱れエネルギー輸送方程式は式(4)のように変形される。

$$\rho \epsilon - \tau \frac{dU}{dy} = \frac{3/2 \kappa_0^2}{\sigma_k C_\mu^{1/2}} \left(\frac{\tau - \tau_b}{\tau} \right) \tau \frac{dU}{dy} \quad (3), \quad \frac{d}{dy} \tau \frac{d\tau}{dU} = \frac{3}{2} \rho \kappa_0^2 \left(\frac{\tau - \tau_b}{\tau} \right) \tau \frac{dU}{dy} \quad (4)$$

ここで、 τ_b は底面せん断応力である。式(4)を流速勾配 dU/dy について求めるため、 dU/dy がほぼ一定とし式(5)のように変形し、底面($y=0$)からある高さ y まで積分すると、結果として式(6)で表されるPrandtlの混合距離仮説を導くことになる。

$$\frac{\tau_b'}{2} \frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dU} \right)^2 = \frac{3}{2} \rho \kappa_0^2 \left(\frac{\tau_b'}{\tau_b} \right) \quad (5), \quad \frac{\tau_b}{\rho} = \frac{3}{2} \kappa_0^2 y^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy} \quad (6)$$

ここで、 $\tau_b' = (d\tau/dy)_{y=0}$ であり、上式の導出において $\tau_b y / \tau_b \ll 1$ が用いられている。比例定数 κ_0 は剥離領域において0.5となる。このことからKarman定数は0.4から0.6までの狭い範囲において変化し、緩やかな圧力勾配の下ではほぼ0.4の一定値を示し、対数則分布する領域が存在することが分かる。

3. 流速分布モデルの検討

従来の乱流境界層に関する研究においては、混合距離モデルを全く前提としないで導出されたモデルがあるが、導出された式系が非常に複雑となること、導入された経験定数の決定に多くの実験データを要することなどが問題点として挙げられる。そこで前節において圧力勾配下における混合距離理論が成立することが

示されたので、これに基づいた流速分布モデルについて検討する。周知のごとく、せん断応力 τ は次式(7)で定義され、これを流速勾配 $\partial U^+ / \partial y^+$ について解くと式(8)のように変形される。

$$\tau^+ = \frac{\partial U^+}{\partial y^+} + l^+ \left| \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \right| \frac{\partial U^+}{\partial y^+} \dots\dots\dots (7), \quad U^+ = 2 \int_0^{y^+} \frac{\tau^+}{1 + \sqrt{1 + 4l^{+2}\tau^+}} dy^+ \dots\dots\dots (8)$$

なお、各諸量は全て摩擦速度および動粘性係数により内部変数表示されている。一定せん断層 $\tau^+=1$ の下で、混合距離 l^+ を壁からの距離に比例するとして $l^+=\kappa y^+$ とすると対数則分布式が得られ、また壁面の極近傍で $l^+=0$ とすると粘性底層における直線分布式が得られる。式(8)から分かるように混合距離理論から流速分布をモデル化する場合、圧力勾配下におけるせん断応力、混合距離をどう表現するかが重要な問題となる。Thomas and Hasani (1989)¹⁾は圧力勾配や吸い込み(transpiration)のある乱流境界層のせん断応力分布について、逆圧力勾配下における線形増加の関係に加えて、次式で与えられる3次の多項式で近似した。

$$\tau^+ = (1 + P^+ y^+) - (3 + 2P^+ R) \cdot (y^+ / R)^2 + (2 + P^+ R) \cdot (y^+ / R)^3 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $R = U \cdot \delta / \nu$ であり、 P^+ は無次元圧力勾配パラメータである。図-1に上式で表されるせん断応力分布と従来のモデルで適応されていた逆圧力勾配における線形増加 $\tau^+=1+P^+y^+$ の関係を示した。このせん断応力の線形増加の変化は、 $y^+=10$ 程度までの領域についてのみ成立する。一方、混合距離 l^+ については、van Driestの減衰関数 Γ によって次式のように与える。

$$l^+ = \kappa y^+ \Gamma(y^+), \quad \Gamma(y^+) = \{1 - \exp(-y^+ / B)\} \dots\dots (10)$$

ここで、 B はdamping factorであり、圧力勾配のある流れについて、Kays(1971)²⁾により次式のように半経験的に与えられている。

$$B = 26 / (1 + 30.18 P^+) \dots\dots\dots (11)$$

図-2に B の変化を示した。また、図-3は式(8)から(11)を用いて計算した流速分布の圧力勾配に対する変化を示している。ここでは実験値を示していないが、バッファ層から対数則領域における変曲点、外層における立ち上がりの部分においてよく一致する。このように、粘性底層から外層までほぼ全域で一致するのは、せん断応力分布に式(9)で表される関係を用いたためであり、このようなせん断応力の関係を従来提案されてきた他のモデルで記述するのは困難である。

4. おわりに

流速分布のモデル化の議論において乱流境界層のデータをもとにした考察が行われていたが、圧力勾配に支配される開水路流れの平均流速分布には、外層の立ち上がりなどいくつか乱流境界層とは大きく異なる傾向が観察される。開水路流れのモデル化については、1) 圧力勾配に対するせん断応力分布を最適化する、2) 圧力勾配とdamping factor B との関連を調べる、ことが今後必要になると考えられる。

参考文献

- 1) Thomas, and Hasani, Trans. of the ASME, vo.111, pp.420-427, 1989., 2) Kays, W. M., ASME Paper No.71-HT-44, 1971.

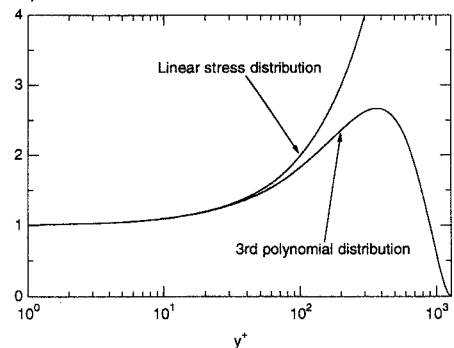


図-1 全せん断応力分布

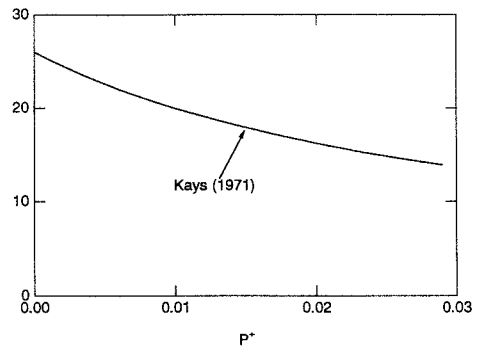


図-2 damping factor B

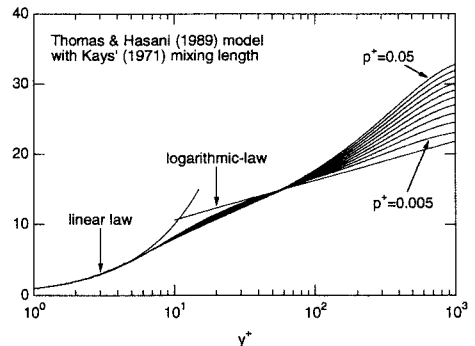


図-3 圧力勾配に対する流速分布の変化