

II-179

緩傾斜側壁を有する台形断面水路のせん断応力分布

金沢工業大学 正会員 山坂昌成

1. はじめに 幅広一様開水路の流れにおいて横断勾配が緩やかな場合には、局所水深を $\tilde{h}$ として底面せん断応力を $\tilde{\tau} = \tilde{\rho} \tilde{g} \tilde{h} i_0 \cos \theta$ (θ は横断勾配角)で近似することがしばしば行われる¹⁾。確かに、 $\theta = 0$ で、側壁の影響が及ばない領域では鉛直縦断面にせん断力は作用せず、この式は重力と底面せん断応力の釣り合い式を厳密に満足するので、 θ が小さいときこの式の有効性は明らかである。しかし、 θ がどのくらいまで適用可能であるのかについては、具体的に明らかにされていない。近年、河川の多自然化や、親水性の向上のために緩傾斜の護岸を用いることが多くなりつつあるため、このような護岸に作用するせん断応力を推定したり、緩傾斜が流れに及ぼす影響を明らかにしておく必要がある。本研究では、このような水路を台形断面水路で代表させ、流速分布と底面、斜面のせん断応力を算定する方法について検討する。

2. 流れの解析 本研究では鉛直方向に一樣な渦動粘性係数を与えた運動方程式を解き、流速分布に関する解析解を得ることにするが、図-1に示すような緩傾斜側壁を有する水路では、側壁部で水深が $0 \sim \tilde{h}_0$ まで連続的に変化するので、渦動粘性係数を横断方向に変化させ、近似的に、

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} / \varepsilon_\infty = (\tilde{h} / \tilde{h}_0)^{3/2} = h^{3/2} \quad (1)$$

で与えることにする。このとき、運動方程式は

$$h^{3/2} \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(h^{3/2} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = -K \quad (2)$$

となる。ここに、

$$K = 15 \tilde{u}_{*0} / \tilde{u}_{m\infty} = 15 C_f^{1/2} \quad (3)$$

であり、 C_f は摩擦係数、 $\sim$ は次元量を表し、添字 ∞ は水深が $\tilde{h}_0$ の二次元流れにおける量を表す。速度の無次元化は $u = \tilde{u} / \tilde{u}_{m\infty}$ とし、座標の無次元化は図-1に示すとおりである。固定境界においてはスリップ速度を許容し、壁面せん断応力がスリップ速度に比例すると仮定すると、境界条件は、

$$Z=0 \text{ で } \frac{\partial u}{\partial Z} = 0 \quad (4)$$

$$Y \geq 1, Z=1 \text{ で } u = -\chi \frac{\partial u}{\partial Z} \quad (5)$$

$$Y \leq 1, Z=Y \text{ で } u = Y \chi_1 \left(-\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{\beta_1^2} \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \quad (6)$$

となる。ここに、

$$\chi = \frac{1}{15 C_f^{1/2}} - \frac{1}{3}, \quad \chi_1 = \chi \cos \theta = \chi \left(\frac{1}{1 + 1/\beta_1^2} \right)^{1/2} \quad (7, 8)$$

である。

[$Y \geq 1$ の解] $Y \geq 1$ では、 $h=1$ であるので式(2), (4), (5)の解は容易に、

$$u = K \left[-\frac{1}{2} Z^2 + \left(\frac{1}{2} + \chi \right) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \exp \{ \beta_1 \delta_j (1-Y) \} \cos (\delta_j Z) \right] \quad (9)$$

のように得られる。ここに、 δ_j は底面の境界条件より、 $\tan \delta_j = 1 / (\chi \delta_j)$ を満足する解である。上式では流路中心($Y=1+\beta_2/\beta_1$)での対称性は厳密には満足されていないが、 β_2 が大きいときこの影響は微小である。未知係数 A_j は $Y \leq 1$ の解との接続条件から決定される。

[$Y \leq 1$ の解] $Y \leq 1$ では、式(2)において $h=Y$ とすると、境界条件をそれぞれ独立に満足する式(2)の非同次解 u_N と同次解 u_H はそれぞれ、

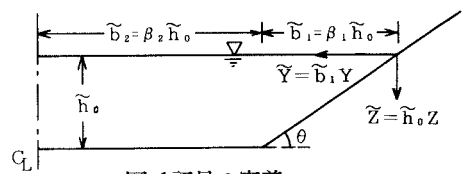


図-1記号の定義

$$u_N = KY^{1/2} \left[\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{Z}{Y} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \right\} + \frac{1}{\beta_1^2} \left\{ \frac{1}{16} \left(\frac{Z}{Y} \right)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \left(\frac{Z}{Y} \right)^2 + \left(\frac{1}{16} + \frac{3}{4} \chi + \chi^2 \right) \right\} \right] \quad (10)$$

$$u_H = KDY^a \left\{ 1 + e_2 \left(\frac{Z}{Y} \right)^2 + e_4 \left(\frac{Z}{Y} \right)^4 + \dots \right\} \quad (11)$$

となり、解は $u = u_N + u_H$ にて表される。同次解の係数 e_2 、 e_4 は式(2)の同次方程式より a の関数となり、

$$e_2 = -\frac{a^2 + \frac{a}{2}}{2\beta_1^2}, \quad e_4 = -\frac{1}{12\beta_1^2} \left(a^2 - \frac{7}{2}a + 3 \right) e_2 \quad (12)$$

である。同次解が側斜面上($Y=Z$)での境界条件を満足するとき、 a は n 次方程式の解となるが、微小項を省略して2次方程式の解で近似すると($a < 0$ は不適)、

$$a = \frac{-\frac{1+6\chi_1}{4} + \left\{ \left(\frac{1+6\chi_1}{4} \right)^2 + 2\beta_1^2(1+2\chi_1) \right\}^{1/2}}{1+2\chi_1} \quad (13)$$

となる。ここまでで、未知係数は式(9)の A_3 と式(11)の D のみである。これらは、 $Y=1$ での速度の連続と、横断速度勾配の連続条件から決定されるが、詳細については省略する。ただし、 a を2次方程式の解1つで近似していることから、横断速度勾配の連続条件は任意の Z で満足することはできず、この鉛直平均値が連続するように係数を定めている。

鉛直平均流速 u_m 、幅広水路の底面せん断応力で無次元化された壁面せん断応力 τ は、2つの領域で別々の算定式となるが、ここでは解析の複雑な $Y \leq 1$ の領域についてのみ示すと、以下となる($Y \geq 1$ については文献2)と同様の式)。

$$u_m = K \left[Y^{1/2} \left\{ \left(\frac{1}{3} + \chi \right) + \frac{1}{\beta_1^2} \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\chi + \frac{1}{2}\chi^2 \right) \right\} + D Y^a \left\{ 1 + \frac{e_2}{3} + \frac{e_4}{5} \right\} \right] \quad (14)$$

$$\tau = Y \left\{ 1 + \frac{1}{\beta_1^2} \left(\frac{1}{2} + \chi \right) \right\} + \frac{D}{\chi} Y^{a+1/2} (1 + e_2 + e_4) \quad (15)$$

3. 解析結果及び実験値との比較 図-2に鉛直平均流速の実測値と計算値の比較を示す。図中の破線は比較のために計算から得られる $Z=0.5$ の高さにおける流速の横断分布を示す。ただし、 $y = 1 - Y$ としている。破線が示す $u_{0.5}$ は底面と斜面の接合部で勾配も連続するが、実線の平均流速は接合部の勾配が斜面部で緩やかとなる不連続性を呈し、実測値との対応もほぼ良好である。図-3は底面、側斜面上におけるせん断応力の分布の計算値を示す。破線が鉛直縦断面に作用するせん断力を無視した $\tau = h \cos \theta$ を一点鎖線が非同次の解(式(15)の Y に比例する項

で、斜面が無限に続いている場合の解)を示し、実線はこの中間に位置している。

4. あとがき 本研究は文部省科学研究費補助金(試験(B)(1)代表:村本嘉雄 京大教授)の補助を受けて行った。ここに感謝の意を表する。

1)江頭・黒木・澤井・山坂:開水路における河床せん断力の推定法、第32回水理講演会論文集、pp.503-521,1988.
2)山坂:台形断面水路における壁面せん断応力分布、第48回年次講演会、pp674-675,1993.

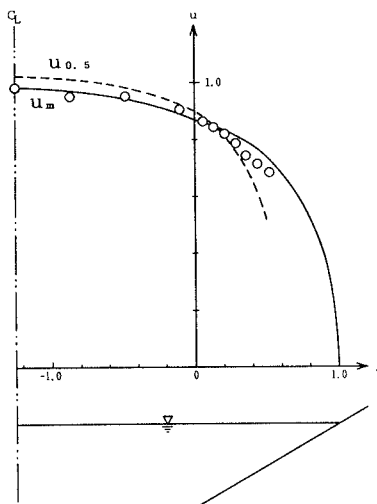


図-2平均流速の横断分布

($C_f=0.00442$, $\beta_1=1.73$, $\gamma=\beta_2/\beta_1=1.25$)

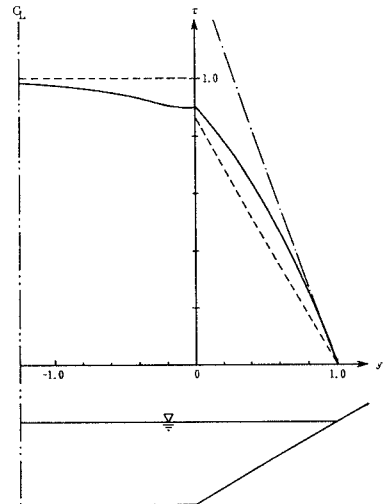


図-3せん断応力の分布