土木学会第50回年次学術講演会（平成７年９月）

Ⅱ－164

ＦＤＳ法による急変流の計算

岐阜大学大学院　学生員　西堀　剛志
岐阜大学工学部　正　員　藤田　一郎

１．はじめに

河床勾配や河幅の急変する山地河川においては、常流、射流の混在した、水理学的にも興味深い複雑な流れとなるため、その現象を数値的にとらえようとする試みが現在でも数多くなされている。しかし、衝撃波あるいは跳水等における不連続面では数値振動が発生しやすく、安定的に計算を進めることが非常に困難である。そのため、現在のところ完全な汎用モデルの構築にはいたっていないといえる。そこで、本研究では圧縮性流体における衝撃波捕獲法の一つとして知られるＦＤＳ法（流束分離法）[1]を一次元の開水路基礎方程式に適用することを提案し、このモデルの妥当性、有用性について検討を行うことにした。

２．計算手法

基礎方程式は、以下のように表せる。

$$Q_t+E_x=S \tag{1}$$

ただし、

$$Q=\begin{pmatrix}h\\M\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}M\\uM+gh^2/2\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}0\\gh(S_0-S_f)\end{pmatrix}$$

ここに、$M=uh$であり、u＝流速、h＝水深、S_0＝河床勾配、S_f＝摩擦勾配、g＝重力加速度である。
また、差分スキームの基本形およびは数値流束Ｅは次のように表される。

$$Q_i^{n+1}=Q_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(E_{i+1/2}-E_{i-1/2})+\Delta t S_i \tag{2}$$

$$E_{i+1/2}=\frac{1}{2}[E_{i+1}+E_i-|A|_{i+1/2}(Q_{i+1}-Q_i)] \tag{3}$$

$$|A|_{i+1/2}=R_{i+1/2}|\Lambda|_{i+1/2}R^{-1}_{i+1/2} \tag{4}$$

ここで、Ａは流束ヤコビアン行列と呼ばれ、行列の各要素A_{ij}は$\partial E_i/\partial Q_j$として求められる。また、Ａは対角化が可能で、対角行列Λを求めることができ、右固有ベクトルＲとその逆行列R^{-1}も以下のように得ることができる。

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-u^2+c^2&2u\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}u-c&0\\0&u+c\end{pmatrix},\ R=\frac{h}{2c}\begin{pmatrix}-1&1\\-(u-c)&u+c\end{pmatrix},\ R^{-1}=\frac{1}{h}\begin{pmatrix}-(u+c)&1\\-(u-c)&1\end{pmatrix} \tag{5}$$

式（４）の右辺の添え字ｉ＋1/2で表される量は、次に説明するＭＵＳＣＬ法により決定されたその点における右と左の物理量を、さらにRoe平均することにより評価される。

３．ＭＵＳＣＬ法について

物理量ｕのi+1/2の左と右の状態（u_L, u_R）はそれぞれ、

$$(u_L)_{i+1/2}=u_i+\frac{1}{4}[(1-\kappa)\Delta_-+(1+\kappa)\Delta_+]_i \tag{6}$$

$$(u_R)_{i+1/2}=u_{i+1}-\frac{1}{4}[(1-\kappa)\Delta_++(1+\kappa)\Delta_-]_{i+1} \tag{7}$$

から求められる。ここに、$\Delta_+=u_{i+1}-u_i$、$\Delta_-=u_i-u_{i-1}$であり、$\kappa=1/3$のとき３次精度を与える。また、さらにＴＶＤ的な解を得るためには制限関数としてminmod limiterを導入する。その場合Δ_+、Δ_-の代わりに、

$$\overline{\Delta}_+=\mathrm{minmod}(\Delta_+, b\Delta_-)\ 、\ \overline{\Delta}_-=\mathrm{minmod}(\Delta_-, b\Delta_+) \tag{8}$$

を用いる。ここで、$b=(3-\kappa)/(1-\kappa)$であり、minmod関数は次のように定義される。

$$\mathrm{minmod}(a,b)=\begin{cases}a & \text{if } |a|<|b| \text{ and } ab>0\\ b & \text{if } |b|<|a| \text{ and } ab>0\\ 0 & \text{if } ab\leqq 0\end{cases} \tag{9}$$

また、上述のＭＵＳＣＬ法をシステムの方程式に拡張することにより、（３）式は以下のように表すことができる。

$$E_{i+1/2}=\frac{1}{2}[E_R+E_L-|A|_{i+1/2}(Q_R-Q_L)]\ 、\quad E_R=E(Q_R),\ E_L=(Q_L) \tag{10}$$

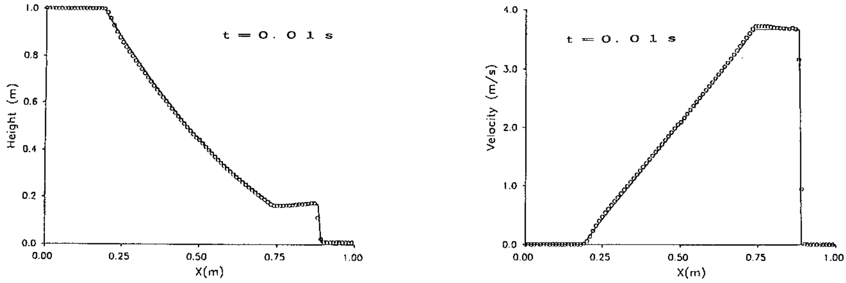
4．結果および考察

図－１は、上流と下流の水深の比H_1/H_2を100とした場合の、１次元ダム崩壊問題の計算結果（白丸）と厳密解（実線）を比較したものである。グリッド数は100とし、それぞれｔ＝0.01ｓ時の(a)水深および(b)流速を表しおり、かなり良好に一致していることがわかる。図－２は幅広水路での計算例を示しているが、いずれも非常に安定的に跳水が再現されている。 図－３は堰を設置した水路での解析結果と実験結果を比較したものである。 流量は2.25(l/s)、勾配は1/750、粗度係数は0.01である。 堰直下においては局所的な逆流域が形成されているため、 やや不適合がみられるものの、定性的には水面形をよくとらえており、 解析結果の妥当性がある程度確認できた。また、 図－４は河床の３カ所にシル（0.25m）を設けた場合の計算例を示しているが、 数値振動のない安定した解が得られており、急激な河床の変化に対しても、有効であることがわかった。

5．おわりに

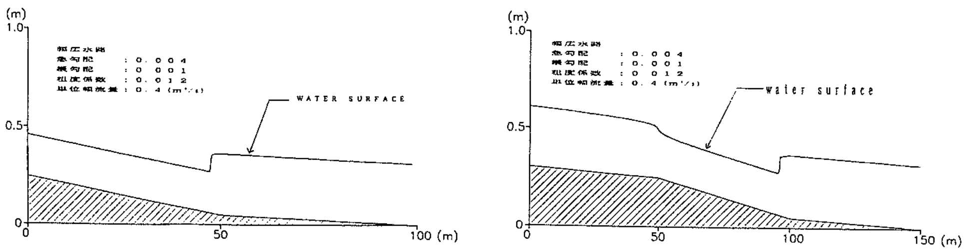
本研究では、ＦＤＳ法により定常１次元開水路流れの計算を行った結果、非常に安定的に急変流の状況をとらえられることが明らかになった。今後、２次元場への拡張も可能であるので、その有用性に期待がもてる。

【参考文献】（１）藤井：流体力学の数値計算法、東京大学出版会、1994.

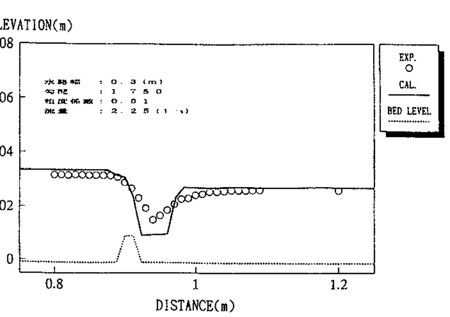


（ａ）水深　　（ｂ）流速

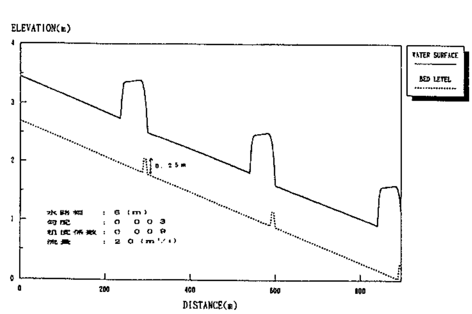
図－１　１－Ｄ　dam－break　problem



図－２　跳水の計算例



図－３　実験値との比較



図－４　シルを越える流れの計算