

II-99

濃度の追跡計算による河川の分散係数の推定法の検討

早稲田大学大学院 学生会員 清水裕之, 羽田野琢磨

大塚信孝

早稲田大学理工学部 正会員 鮎川 登

1. はじめに

河川における分散係数を推定する方法の一つとして、河川に染料や放射性物質などのトレーサーを投入し、下流の2断面でトレーサーの濃度の時間変化を測定し、上流側断面の測定値を境界条件として、分散係数の値を仮定して、移流分散方程式により下流側断面の濃度を求め、計算値と測定値が一致するように、分散係数の値を推定する方法がある。ここでは、この方法により、測定データとして Fischer¹⁾ の論文に掲載されているデータを用い、移流分散方程式の理論解を用いる方法と数値解を用いる方法により濃度を計算し、分散係数を推定した結果について述べる。

2. 濃度の測定データ

Fischer の論文に掲載されている濃度の測定データは、Godfrey-Frederick の論文から引用したもので、トレーサーとして放射性物質の gold-198 を線源として投入したときの投入地点から 7,870ft (2,400m) 下流の断面 A と 13,500ft (4,110m) 下流の断面 B におけるトレーサーの濃度の測定値が 3~10 分間隔で示されている。断面 A~B 間の水理条件は水深 2.67~2.96ft (0.81~0.90m)、河幅 58~70ft (17.7~21.3m)、平均流速 1.74~1.49ft/s (0.53~0.45m/s) である。

3. 移流分散方程式の解析解を用いる方法

$$\text{移流分散方程式: } \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

の瞬間面源に対する解析解として次のような解が得られている。

$$\text{Taylor の解: } C(x, t) = \frac{M}{A\sqrt{4\pi Et}} \exp\left\{-\frac{(x-ut)^2}{4Et}\right\} \quad (2)$$

$$\text{速水の解: } C(x, t) = \frac{Mx}{A\sqrt{4\pi Et}} \exp\left\{-\frac{(x-ut)^2}{4Et}\right\} \quad (3)$$

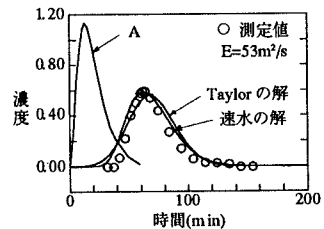


図1 理論解(速水の解、Taylorの解)

ここで、 C は濃度、 u は流速、 E は分散係数、 M は瞬間的に投入される物質の質量、 A は流水断面積、 x は距離、 t は時間である。

瞬間面源に対する移流分散方程式の解析解(2)あるいは(3)を重ね合わせることで、断面Aにおける濃度の時間変化から断面Bにおける濃度の時間変化を計算する方法が Fischer および Barnett により提案されている。

$$(1) \text{ Fischer の方法: } C(x_B, t) = \int_{t_0}^{t_d} \frac{C(x_A, \tau)u}{\sqrt{4\pi E(t_B - t_A)}} \exp\left\{-\frac{u^2(t_B - t_A - t + \tau)^2}{4E(t_B - t_A)}\right\} d\tau \quad ; \quad t_B = t_A + \frac{x_B - x_A}{u} \quad (4)$$

$$(2) \text{ Barnett の方法: } C(x_B, t) = \int_{t_0}^{t_d} \frac{C(x_A, \tau)(x_B - x_A)}{(t - \tau)\sqrt{4\pi E(t - \tau)}} \exp\left\{-\frac{\{(x_B - x_A) - u(t - \tau)\}^2}{4E(t - \tau)}\right\} d\tau \quad (5)$$

ここで、 t_0 は断面Aにおけるトレーサーの到達時刻、 t_d は断面Aにおけるトレーサーの流下終了時の時刻である。

流速を 0.58m/s とし、分散係数 E の値を変えて、式(4)及び式(5)により断面Bにおける濃度の時間変化を計算し、測定値と比較した結果、 $E=53\text{m}^2/\text{s}$ とすると、図1に示すように、計算結果と測定値がほぼ一致する結果が得られた。

4. 移流分散方程式の数値解を用いる方法

4.1 差分法

移流分散方程式(1)の差分法による数値解法としては種々の解法が提案されているが、ここでは1次と3次の風上差分法、および Lax-Wendroff 法を用いる。

$$(1) \text{ 1次風上差分法: } \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = E \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

$$(2) \text{ 3次風上差分法: } \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u \frac{2C_{i+1}^n + 3C_i^n - 6C_{i-1}^n + C_{i-2}^n}{6\Delta x} = E \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (7)$$

$$(3) \text{ Lax-Wendroff 法: } C_i^{n+1} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} + d \right) C_{i-1}^n + (1 - \alpha^2 - 2d) C_i^n + \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{2} + d \right) C_{i+1}^n \quad (8)$$

$$\text{ここで、} \quad \alpha = u \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad d = E \frac{\Delta t^2}{(\Delta x)^2} \quad (9)$$

式(6)～(8)を用いて、計算断面間隔 Δx を 100m、計算時間間隔 Δt を 60sec とし、計算値と測定値がほぼ一致するように、分散係数を定めた場合の計算結果を示すと、それぞれ、図2～4 のようになり、分散係数の値は1次風上差分法では 36m²/s、3次風上差分法では 65m²/s、Lax-Wendroff 法では 55m²/s と推定された。なお、図2～4 には、参考のために $E=0$ とした場合の計算結果も示した。

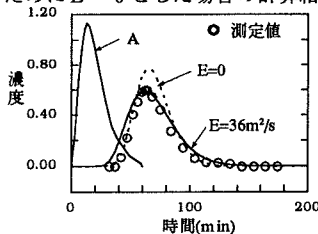


図2 1次風上差分法

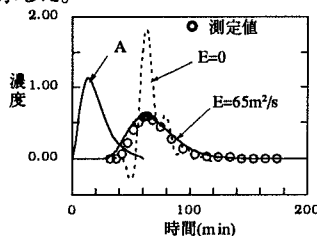


図3 3次風上差分法

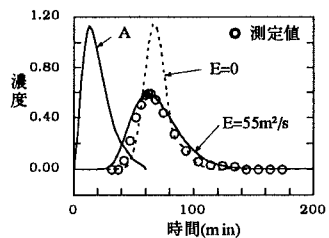


図4 Lax-Wendroff 法

4.2 特性曲線法に基づく方法

移流分散方程式を移流方程式と分散方程式に分離し、移流方程式を特性曲線法に基づいて解き、分散方程式を差分法で解く方法が Holly-Preissmann および 鮎川らによって提案されている。

(1) Holly-Preissmann 法

移流方程式の解は次式で計算する。

$$C_i^{n+1} = a_1 C_{i-1}^n + a_2 C_i^n + a_3 C_{i+1}^n + a_4 C_{i+2}^n, \quad CX_i^{n+1} = b_1 C_{i-1}^n + b_2 C_i^n + b_3 C_{i+1}^n + b_4 C_{i+2}^n \quad (10)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \alpha^2(3-2\alpha), & a_2 &= 1-a_1, & a_3 &= \alpha^2(1-\alpha)\Delta x, & a_4 &= -\alpha(1-\alpha)^2\Delta x \\ b_1 &= \frac{6\alpha(\alpha-1)}{\Delta x}, & b_2 &= -b_1, & b_3 &= \alpha(3\alpha-2), & b_4 &= (\alpha-1)(3\alpha-1) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

である。

分散方程式の解は次式で計算する。

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = E \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (12)$$

(2) 鮎川らの方法²⁾

移流方程式の解は「特性曲線 $dx/dt=u$ 上で $C=\text{const}$ 」と表されることを用いて求める。分散方程式は Crank-Nicolson スキームにより差分化し、数値解を求める。

Holly-Preissmann 法および 鮎川らの方法を用いて、流速 u を 0.58m/s、計算断面間隔 Δx を 100m、計算時間間隔 Δt を 60sec とし、計算値と測定値がほぼ一致するように、分散係数を定めた場合の計算結果を示すと、それぞれ、図5および図6 のようになり分散係数の値は、Holly-Preissmann 法では 52m²/s、鮎川らの方法では 53m²/s と推定された。なお、図5、図6 には参考のために $E=0$ とした場合の計算結果も示した。

5. まとめ

濃度追跡法により河川における分散係数の値を推定した結果、次のことが示された。(1) 移流分散方程式の理論解である Taylor の解と速水の解を用いて濃度を追跡した場合は、分散係数の値はともに 53m²/s と推定された。(2) 移流分散方程式の数値解を用いて濃度を追跡した場合は、分散係数は数値計算の方法によって異なる値が推定されたが、 $E=0$ とした場合(移流方程式)の解が厳密解にはほぼ一致する場合には、数値解による分散係数の推定値は理論解による推定値とほぼ一致した。

参考文献

- 1) Fischer, H.B.: Dispersion Predictions in National Streams, Journal of the Sanitary Engineering Division, Proc. ASCE, Vol. 94, No. SA5, Oct, 1968, pp.927～941.
- 2) 八尋洋一・根本浩史・鮎川 登: 特性曲線法に基づく移流拡散方程式の数値計算, 第50回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1995.

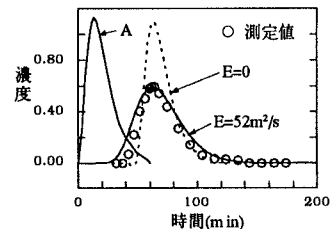


図5 Holly-Preissmann 法

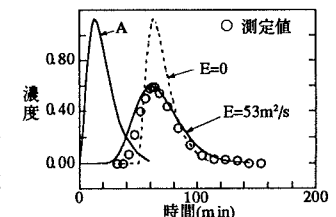


図6 鮎川らの方法