

II-98

特性曲線法に基づく移流拡散方程式の数値計算

早稲田大学大学院 学生会員 八尋 洋一
清水建設(株) 正会員 根本 浩史
早稲田大学理工学部 正会員 鮎川 登

1. はじめに

移流拡散方程式の数値計算法としては差分法が用いられることが多いが、数値計算の安定のために移流項の差分化に工夫が必要とされる。移流項の差分スキームとして風上差分、QUICKスキームなど数多くのスキームが提案されているが、数値拡散による誤差が問題になる。

移流拡散方程式を移流方程式と拡散方程式に分離し、移流方程式と拡散方程式を交互に解いて移流拡散方程式の数値解を求める方法(部分段階法)が考案されている。移流方程式の解は「特性曲線上で濃度が一定になる」と表されるので、このことを用いると、移流方程式の数値解を精度よく求めることができる。また、拡散方程式は差分法により精度よく数値解を求めることができる。したがって、部分段階法によると、移流拡散方程式の精度のよい数値解を得ることができるものと考えられる。

Holly-Preissmann¹⁾は特性曲線法に基づいて移流方程式の数値解を求める方法を提案しているが、Holly-Preissmann法では2点における濃度と濃度勾配を用いて内挿により予め定められた地点の濃度を算定するために、内挿による誤差が生ずる。本研究では、移流方程式の数値解を求めるさいの誤差を小さくするために、特性曲線に沿って濃度を求める方法について述べる。

2. 移流拡散方程式の数値計算

移流拡散方程式

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

を移流方程式と拡散方程式に分離し、それらを交互に解くことにより移流拡散方程式の数値計算を行なう。

$$\text{移流方程式: } \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad \text{拡散方程式: } \frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2), (3)$$

ここで、 C は濃度、 u は流速、 K は拡散係数、 x は距離、 t は時間である。

2.1 移流方程式の数値計算

移流方程式(2)の特性微分方程式は

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{dC}{0}, \quad \frac{dx}{dt} = u; \quad dC = 0 \quad (4), (5)$$

となる。したがって、移流方程式(2)の解は

$$\text{特性曲線 } \frac{dx}{dt} = u \text{ 上で } C = \text{const.} \quad (6)$$

となる。

2.2 拡散方程式の数値計算

拡散方程式(3)はCrank-Nicolsonスキームにより差分化し、数値解を求める。

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = K \left\{ \frac{\Delta x_{i-1} C_{i+1}^n - (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) C_i^n + \Delta x_i C_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} + \frac{\Delta x_{i-1} C_{i+1}^{n+1} - (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) C_i^{n+1} + \Delta x_i C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} \right\} \quad (7)$$

2.3 移流拡散方程式の数値計算の手順

移流拡散方程式を移流方程式と拡散方程式に分離して数値解を求めるための計算手順は次のようである。

1) 計算断面 x_i^0 を出発する水粒子の Δt 時間後の位置 x_i^1 を $x_i^1 = 0.5(u_i^0 + \bar{u}_i^1) \Delta t$ として求める。ここで、 u_i^0 は時刻0、位置 x_i^0 の流速、 $\bar{u}_i^1$ は時刻 Δt 、位置 $x_i^1 = x_i^0 + u_i^0 \Delta t$ の流速である。

2) x_i^1 の濃度 C_i^1 を $C_i^1 = C_i^0$ とする。ここで、 C_i^0 は x_i^0 の濃度である。

3) 式(7)で、 $C_i^n = C_i^1$, $\Delta x = x_{i+1}^1 - x_i^1$ として、 C_{i+1}^{n+1} を求め、 $C_i^1 = C_{i+1}^{n+1}$ として x_i^1 の濃度 C_i^1 の値を更新する。更新した C_i^1 が $t = \Delta t$ における移流拡散方程式の解になる。

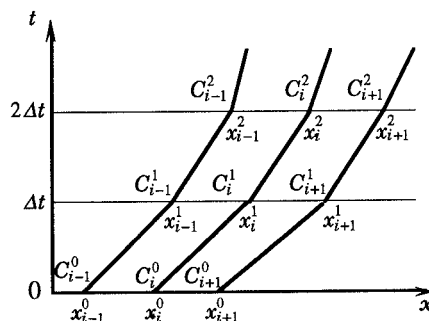


図1 移流拡散方程式の計算手順

4) 時刻 $t = \Delta t$ における点 x_i^1 を出発する水粒子の Δt 時間後(時刻 $t = 2\Delta t$)の位置 x_i^2 を $x_i^2 = 0.5(u_i^1 + \bar{u}_i^2)$ として求める。ここで、 u_i^1 は時刻 $2\Delta t$ 、位置 x_i^1 の流速、 $\bar{u}_i^2$ は時刻 $2\Delta t$ 、位置 $\bar{x}_i^2 = x_i^1 + u_i^1 \Delta t$ の流速である。

5) x_i^2 の濃度 C_i^2 を $C_i^2 = C_i^1$ とする。

6) 式(7)で、 $C_i^m = C_i^2$ 、 $\Delta x_i = x_{i+1}^2 - x_i^2$ として C_i^{m+1} を求め、 $C_i^2 = C_i^{m+1}$ として x_i^2 の濃度 C_i^2 の値を更新する。更新した C_i^2 が $t = 2\Delta t$ における移流拡散方程式の解になる。

以下、順次、所定の時刻まで同様の計算を繰り返す。

3. 移流拡散方程式の数値計算法の妥当性の検討

本研究で提案した移流拡散方程式の数値計算法の妥当性を検討するために、移流方程式および移流拡散方程式について、厳密解(解析解)と1次および3次精度の風上差分法、特性曲線法に基づくHolly-Preissmann法および著者の方法による数値解を比較し、図2～図5に示した。計算条件は流速 u を 0.5 m/s 、拡散係数 K を $1 \text{ m}^2/\text{s}$ 、計算断面間隔 Δx は 100 m 、計算時間間隔 Δt は 60 sec とした。

図2および図3によると、移流方程式については、Holly-Preissmann法は、1次および3次精度の風上差分法に比べ、精度が向上しているが、数値拡散を生じていることがわかる。著者の方法は数値拡散を生じず、厳密解と一致する解を与えることがわかる。

図4および図5によると、移流拡散方程式についても、Holly-Preissmann法は、1次および3次精度の風上差分法に比べ、精度が向上しているが、数値拡散を生じていることがわかる。著者の方法は厳密解とほぼ一致する解を与えることがわかる。

参考文献

- 1) Holly, F.M. and Preissmann, A. : Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions, Proc. ASCE, No. HY11, pp.1159～1277, Nov., 1977.

